$\boxed{1}$

(1)

$\angle$AOBの二等分線とABの交点をDとすると,

$$\mathrm{AD}:\mathrm{BD}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=|\vec{a}|:|\vec{b}|$$

であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a}+\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}\\&=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\end{aligned}$$

である。sを実数とすると,点PはOD上にあることから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

と表される。したがって,$t=\dfrac{s|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\frac{s|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\\&=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\end{aligned}$$

と書ける。

(証明終)

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$$

より,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|&=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}\\&=8\end{aligned}$$

となる。(1)より,実数p, qを用いて,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\vec{a}+p\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)\\&=\vec{a}+p\left(\frac{\vec{a}}{7}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{8}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\vec{b}+q\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}\right)\\&=\vec{b}+q\left(\frac{\vec{b}}{5}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{8}\right)\end{aligned}$$

とかける。$\vec{a}, \vec{b}$は一次独立であるから,係数を比較して,

$$\begin{cases}1+\dfrac{1}{56}p=\dfrac{q}{8}\\[2mm]\dfrac{p}{8}=1+\dfrac{3}{40}q\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}p=14\\q=10\end{cases}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\vec{b}+q\left(\frac{\vec{b}}{5}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{8}\right)\\&=\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{7}{4}\vec{b}\end{aligned}$$

である。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{7}{4}\vec{b}$

$\boxed{2}$

(1)

行列 AB と BA を計算すると,

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a+sb & -b \\ c+sd & -d \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a & b \\ as-c & bs-d \end{pmatrix}$$

が得られる。これを, $AB+BA=(a+d)B$ に代入すると,

$$\begin{pmatrix} a+sb & -b \\ c+sd & -d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ as-c & bs-d \end{pmatrix}=(a+d)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+sb & 0 \\ as+sd & bs-2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ s(a+d) & -(a+d) \end{pmatrix}$$

となるから, 行列の $(1,1)$ 成分および $(2,2)$ 成分を比較すると,

$$\begin{cases} 2a+sb=a+d \\ bs-2d=-a-d \end{cases}$$

となる。この 2 式を解くと, $b\neq 0$ であるから,

$$2b\cdot s+2a-2d=0$$
$$s=\frac{d-a}{b}$$

が得られる。

(答) $s=\dfrac{d-a}{b}$

(2)

$AX=\alpha X$ に $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ を代入すると,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+bt \\ c+dt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha t \end{pmatrix}$$

となる。成分を比較すると,

$$\begin{cases} a+bt=\alpha \\ c+dt=\alpha t \end{cases} \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

となる。上の式を変形すると, $b\neq 0$ であるから,

$$a+bt=\alpha$$
$$\therefore t=\frac{\alpha-a}{b}$$

が得られる。

(答) $t=\dfrac{\alpha-a}{b}$

(3)

α, β が 2 次方程式 $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$ の解であることから, 解と係数の関係より,

$$\alpha+\beta=a+d \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

が得られる。ここで, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=BX$ を計算すると,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 \\ s-t \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{d-\alpha}{b} \end{pmatrix}$$

となる。したがって,

$$\begin{cases} u=1 \\ bv=d-\alpha \end{cases} \qquad \cdot\cdot\cdot ③$$

が得られる。②, ③式を用いて $\det P$ を計算すると,

$$\det P=\det\begin{pmatrix} 1 & u \\ t & v \end{pmatrix}$$
$$=\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\alpha-a}{b} & \dfrac{d-\alpha}{b} \end{pmatrix}$$
$$=\frac{a+d-2\alpha}{b}$$
$$=\frac{\beta-\alpha}{b}$$

となり, 問題文より $\alpha\neq\beta$ であるから,

$$\det P\neq 0$$

となる。したがって, P は逆行列をもつ。このとき, AP を計算すると,

$$AP=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ t & v \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a+bt & au+bv \\ c+dt & cu+dv \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \alpha & au+bv \\ \alpha t & cu+dv \end{pmatrix} \quad (\because ①式による)$$

が得られる。①, ②, ③式を用いることにより,

$$au+bv=a+d-\alpha$$
$$=\alpha+\beta-\alpha$$
$$=\beta$$
$$cu+dv=\alpha t-dt+dv$$
$$=(\alpha-d)\cdot\frac{\alpha-a}{b}+dv$$
$$=-bv\cdot\frac{\alpha-a}{b}+dv$$
$$=(a-\alpha+d)v$$
$$=\beta v$$

となるため,

$$AP=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha t & \beta v \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & u \\ t & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$
$$=P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となる。以上より, 題意は示された。

(証明終)

$\boxed{3}$

(1)

$a_1=0$ より,

$$\begin{aligned} f_1'(x)&=6x^2-6px \\ &=6x(x-p) \end{aligned}$$

となるから, $0<p<\dfrac{1}{6}$ より, 増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって $f_1(x)$ は極大値と極小値を持つ。a_2 は $f_1(x)$ の極大値と極小値の和であるから,

$$\begin{aligned} a_2&=f_1(0)+f_1(p) \\ &=-1-p^3-1 \\ &=-p^3-2 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_2=-p^3-2$

(2)

$f_k'(x)=6x^2-6px+6a_k=6\left(x^2-px+a_k\right)$ であるから, $f_k(x)$ が極大値と極小値を持つならば,

$$\begin{aligned} &f_k'(x)=0 \\ \Leftrightarrow\ &x^2-px+a_k=0 \end{aligned}$$

の解が異なる2つの実数解となるので,

$$\begin{aligned} &p^2-4a_k>0 \\ \Leftrightarrow\ &a_k<\frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

である。このとき, 極大値および極小値をとる x の値は, $x^2-px+a_k=0$ の異なる2つの解であるから, その解を実数 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると,

$$\begin{cases} \alpha+\beta=p \\ \alpha\beta=a_k \end{cases}$$

である。a_{k+1} は $f_k(x)$ の極大値と極小値の和であるから,

$$\begin{aligned} a_{k+1}&=f_k(\alpha)+f_k(\beta) \\ &=2\left(\alpha^3+\beta^3\right)-3p\left(\alpha^2+\beta^2\right)+6a_k(\alpha+\beta)-2 \\ &=2\left\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\right\}-3p\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\}+6a_k(\alpha+\beta)-2 \\ &=-p^3+6a_kp-2 \end{aligned}$$

となる。ここで, $f_{k+1}(x)$ について考える。

$$\begin{aligned} f_{k+1}'(x)&=6x^2-6px+6a_{k+1} \\ &=6\left(x^2-px-p^3+6a_kp-2\right) \end{aligned}$$

であることから, x に関する多項式 $x^2-px-p^3+6a_kp-2$ の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} D&=p^2-4\left(-p^3+6a_kp-2\right) \\ &=4p^3+p^2-24a_kp+8 \end{aligned}$$

である。よって, $f_k(x)$ が極大値, 極小値を持つ条件 $a_k<\dfrac{p^2}{4}$ を用いると,

$$D>-2p^3+p^2+8$$

を得る。ここで, $g(p)=-2p^3+p^2+8$ とおくと,

$$\begin{aligned} g'(p)&=-6p^2+2p \\ &=-2p(3p-1) \end{aligned}$$

であるから, $0<p<\dfrac{1}{6}$ において, $g(p)$ は単調増加する。$g(0)=8>0$ より, $0<p<\dfrac{1}{6}$ において $g(p)>0$ であるから, $0<p<\dfrac{1}{6}$ において, $D>0$ となる。したがって, $f_k(x)$ が極大値, 極小値を持つとき, $f_{k+1}(x)$ も極大値, 極小値を持つことが示された。

(証明終)

(3)

(1)より $f_1(x)$ が極大値, 極小値を持つから, (2)より帰納的にすべての $f_n(x)$ は極大値, 極小値を持つことがいえる。よって, (2)より

$$a_{n+1}=6pa_n-p^3-2$$

である。

(答) $a_{n+1}=6pa_n-p^3-2$

(4)

$$\begin{aligned} &a_{n+1}=6pa_n-p^3-2 \\ \Leftrightarrow\ &a_{n+1}+\frac{p^3+2}{1-6p}=6p\left(a_n+\frac{p^3+2}{1-6p}\right) \end{aligned}$$

となるので, $a_1=0$ より,

$$\begin{aligned} a_n&=-\frac{p^3+2}{1-6p}+(6p)^{n-1}\frac{p^3+2}{1-6p} \\ &=\frac{p^3+2}{1-6p}\left\{(6p)^{n-1}-1\right\} \end{aligned}$$

である。

(答) $a_n=\dfrac{p^3+2}{1-6p}\left\{(6p)^{n-1}-1\right\}$

4

(1)

Cを定数として，

$$\left(-e^{-x}\sin x+C\right)'=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x=f\left(x\right)$$

となるから，$\int f\left(x\right)dx=-e^{x}\sin x+C$ である。

(証明終)

(2)

2つの関数の差 $g\left(x\right)-f\left(x\right)$ を考えると，与えられた不等式は，

$$e^{-x}\left(\alpha-\sin x+\cos x\right)\geqq 0$$

と変形できる。ここで，三角関数の合成公式より，

$$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，

$$g\left(x\right)-f\left(x\right)=e^{-x}\left(\alpha-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\geqq 0$$

となる。よって，この不等式を満たす最小の α は $\alpha=\sqrt{2}$ となる。

(答) $\sqrt{2}$

(3)

$\alpha=\sqrt{2}$ とすると，$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ となるときに $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ となる。よって，

$$a_n=\left(2n+\frac{3}{4}\right)\pi$$

である。ここで，$\frac{\left|f\left(x\right)\right|+f\left(x\right)}{2}$ は，

$$f\left(x\right)\geqq 0 \text{ のとき } \frac{\left|f\left(x\right)\right|+f\left(x\right)}{2}=f\left(x\right)$$

$$f\left(x\right)<0 \text{ のとき } \frac{\left|f\left(x\right)\right|+f\left(x\right)}{2}=0$$

であるから，求める積分は，

$$\begin{aligned}
S_n&=\int_{\left(2n-\frac{5}{4}\right)\pi}^{\left(2n+\frac{3}{4}\right)\pi}\left\{g\left(x\right)-\frac{\left|f\left(x\right)\right|+f\left(x\right)}{2}\right\}dx\\
&=\left[-\sqrt{2}e^{-x}\right]_{\left(2n-\frac{5}{4}\right)\pi}^{\left(2n+\frac{3}{4}\right)\pi}-\left(\int_{\left(2n-\frac{5}{4}\right)\pi}^{\left(2n-\frac{3}{4}\right)\pi}f\left(x\right)dx+\int_{\left(2n+\frac{1}{4}\right)\pi}^{\left(2n+\frac{3}{4}\right)\pi}f\left(x\right)dx\right)\\
&=\sqrt{2}\left(e^{-\left(2n-\frac{5}{4}\right)\pi}-e^{-\left(2n+\frac{3}{4}\right)\pi}\right)-\left[-e^{-x}\sin x\right]_{\left(2n-\frac{5}{4}\right)\pi}^{\left(2n-\frac{3}{4}\right)\pi}-\left[-e^{-x}\sin x\right]_{\left(2n+\frac{1}{4}\right)\pi}^{\left(2n+\frac{3}{4}\right)\pi}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\left(2n-\frac{5}{4}\right)\pi}-e^{-\left(2n-\frac{3}{4}\right)\pi}-e^{-\left(2n+\frac{1}{4}\right)\pi}-e^{-\left(2n+\frac{3}{4}\right)\pi}\right)\\
&=\frac{e^{-2(n-1)\pi}}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{3}{4}\pi}-e^{-\frac{5}{4}\pi}-e^{-\frac{9}{4}\pi}-e^{-\frac{11}{4}\pi}\right)
\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{e^{-2(n-1)\pi}}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{3}{4}\pi}-e^{-\frac{5}{4}\pi}-e^{-\frac{9}{4}\pi}-e^{-\frac{11}{4}\pi}\right)$

(4)

(3)の結果より，$\left\{S_n\right\}$ は公比 $e^{-2\pi}$ の等比数列となる。$\left|e^{-2\pi}\right|<1$ であるから，求める無限級数は

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}S_n&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{3}{4}\pi}-e^{-\frac{5}{4}\pi}-e^{-\frac{9}{4}\pi}-e^{-\frac{11}{4}\pi}\right)\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2(n-1)\pi}\\
&=\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}-e^{-\frac{5}{4}\pi}-e^{-\frac{9}{4}\pi}-e^{-\frac{11}{4}\pi}}{\sqrt{2}\left(1-e^{-2\pi}\right)}
\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}-e^{-\frac{5}{4}\pi}-e^{-\frac{9}{4}\pi}-e^{-\frac{11}{4}\pi}}{\sqrt{2}\left(1-e^{-2\pi}\right)}$