2014年度

M 2　数　学

2月25日(火)
【前 期 日 程】

情 報 学 部(情報科学科)
理　学　部(物理学科，化学科)
工　学　部

13：00〜15：00

注 意 事 項

試験開始前

1　監督者の指示があるまで，問題冊子，解答用紙に手を触れないでください。

2　監督者の指示に従って，全部の解答用紙(4枚)に受験番号を記入してください。

試験開始後

3　この問題冊子は，4ページあります。はじめに，問題冊子，解答用紙を確かめ，枚数の不足や，印刷の不鮮明なもの，ページの落丁・乱丁があった場合は，手をあげて監督者に申し出てください。

4　解答は，すべて別紙解答用紙に記入してください。

5　解答スペースが不足するときは，解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし，その場合は，表面に「裏へつづく」と明記してください。

6　問題は，声を出して読んではいけません。

7　各問ごとの配点は，比率(%)で表示してあります。

試験終了後

8　問題冊子は，必ず持ち帰ってください。

$\boxed{1}$ $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos x + \sin x}\,dx$，$J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos x + \sin x}\,dx$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ とおいて置換積分法を用いることで，$I = J$ を示せ。

(2) $I + J$ の値を求めよ。

(3) I と J の値を求めよ。

（配点 25 %）

◇M11(284—84)

$\boxed{2}$ a，b，c，d，s，t を実数とし，$b \fallingdotseq 0$ とする。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とし，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix}$ は等式

$$AB + BA = (a+d)B$$

を満たすとする。x の 2 次方程式

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$$

は異なる 2 つの実数解 α，β をもつとし，列ベクトル $X = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ は等式 $AX = \alpha X$ を満たすとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) s を行列 A の成分を用いて表せ。

(2) t を a，b，α を用いて表せ。

(3) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = BX$ とし，$P = \begin{pmatrix} 1 & u \\ t & v \end{pmatrix}$ とするとき，行列 P は逆行列をもち，

$$AP = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

を満たすことを示せ。

（配点 25 %）

$\boxed{3}$ $f(x)$ と $g(x)$ は x の整式で

$$f(x)-f(0)=4x^3-5x^2+2x,$$
$$(2x-1)\{g(x)-g(0)\}=f(x)+2\int_0^x (x-t)g'(t)\,dt+\int_0^2 g(t)\,dt$$

を満たすとする。ただし，$g'(t)$ は $g(t)$ の導関数である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 等式

$$-\{g(x)-g(0)\}=f(x)-2\int_0^x tg'(t)\,dt+\int_0^2 g(t)\,dt$$

が成り立つことを示せ。

(2) $f(x)$ が極小値 $\dfrac{9}{4}$ をとるとき，$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

（配点 25 %）

$\boxed{4}$ p を $0 < p < \dfrac{1}{6}$ を満たす実数とする。次のように数列 $\{a_n\}$ を帰納的に定義する。$a_1 = 0$ とし，第 n 項 a_n を用いた関数

$$f_n(x) = 2x^3 - 3px^2 + 6a_n x - 1$$

が極大値と極小値をもつならば，第 $n+1$ 項 a_{n+1} を $f_n(x)$ の極大値と極小値の和により定める。そうでないならば，$a_{n+1} = 0$ と定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f_1(x)$ が極大値と極小値をもつことを示し，a_2 を p を用いて表せ。

(2) k を自然数とする。関数 $f_k(x)$ が極大値と極小値をもつならば，関数 $f_{k+1}(x)$ も極大値と極小値をもつことを示せ。

(3) a_{n+1} と a_n の関係式を p を用いて表せ。

(4) 一般項 a_n を p を用いて表せ。

（配点 25 %）