2014年度

M 3　　数　　学

2月25日(火)
【前 期 日 程】　　理　学　部(数学科)　　13：00〜15：00

注 意 事 項

試験開始前

1　監督者の指示があるまで，問題冊子，解答用紙に手を触れないでください。

2　監督者の指示に従って，全部の解答用紙(4枚)に受験番号を記入してください。

試験開始後

3　この問題冊子は，4ページあります。はじめに，問題冊子，解答用紙を確かめ，枚数の不足や，印刷の不鮮明なもの，ページの落丁・乱丁があった場合は，手をあげて監督者に申し出てください。

4　解答は，すべて別紙解答用紙に記入してください。

5　解答スペースが不足するときは，解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし，その場合は，表面に「裏へつづく」と明記してください。

6　問題は，声を出して読んではいけません。

7　各問ごとの配点は，比率(%)で表示してあります。

試験終了後

8　問題冊子は，必ず持ち帰ってください。

1 三角形 OAB において，頂点 A，B におけるそれぞれの外角の二等分線の交点を C とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P が $\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線上にあるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

となる実数 t が存在することを示せ。

(2) $|\vec{a}| = 7$，$|\vec{b}| = 5$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 5$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

（配点 25 %）

2 a，b，c，d，s，t を実数とし，$b \fallingdotseq 0$ とする。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とし，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix}$ は等式

$$AB + BA = (a+d)B$$

を満たすとする。x の 2 次方程式

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$$

は異なる 2 つの実数解 α，β をもつとし，列ベクトル $X = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ は等式 $AX = \alpha X$ を満たすとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) s を行列 A の成分を用いて表せ。

(2) t を a，b，α を用いて表せ。

(3) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = BX$ とし，$P = \begin{pmatrix} 1 & u \\ t & v \end{pmatrix}$ とするとき，行列 P は逆行列をもち，

$$AP = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

を満たすことを示せ。

（配点 25 %）

$\boxed{3}$ p を $0 < p < \dfrac{1}{6}$ を満たす実数とする。次のように数列 $\{a_n\}$ を帰納的に定義する。$a_1 = 0$ とし，第 n 項 a_n を用いた関数

$$f_n(x) = 2x^3 - 3px^2 + 6a_n x - 1$$

が極大値と極小値をもつならば，第 $n+1$ 項 a_{n+1} を $f_n(x)$ の極大値と極小値の和により定める。そうでないならば，$a_{n+1} = 0$ と定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f_1(x)$ が極大値と極小値をもつことを示し，a_2 を p を用いて表せ。

(2) k を自然数とする。関数 $f_k(x)$ が極大値と極小値をもつならば，関数 $f_{k+1}(x)$ も極大値と極小値をもつことを示せ。

(3) a_{n+1} と a_n の関係式を p を用いて表せ。

(4) 一般項 a_n を p を用いて表せ。

（配点 25 %）

◇M12(284—91)

$\boxed{4}$ α を実数とする。2 つの関数 $f(x) = e^{-x}(\sin x - \cos x)$ と $g(x) = \alpha e^{-x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int f(x)\,dx = -e^{-x}\sin x + C$ であることを示せ。ただし，C は積分定数である。

(2) すべての $x \geqq 0$ について $f(x) \leqq g(x)$ が成り立つような α の値の最小値を求めよ。

(3) α を (2) で求めた最小値とする。曲線 $y = f(x)$ $(x \geqq 0)$ と曲線 $y = g(x)$ $(x \geqq 0)$ との共有点の x 座標を小さい方から順に a_0，a_1，a_2，$\cdots$ とし，n が自然数であるとき，

$$S_n = \int_{a_{n-1}}^{a_n} \left\{ g(x) - \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \right\} dx$$

とする。このとき，S_n を求めよ。

(4) (3) で求めた S_n について，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

（配点 25 %）