

1

(1)

すべての自然数 n について $a_n > 0$ であるから、 $c_n = \frac{1}{a_n} > 0$ である。よって、

$$c_n = \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{c_n}$$

と変形できる。これを数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$3a_{n+1} = a_n - 2a_{n+1}a_n$$

に代入すると、 c_{n+1} と c_n の関係式

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{1}{c_{n+1}} &= \frac{1}{c_n} - 2 \cdot \frac{1}{c_{n+1}} \cdot \frac{1}{c_n} \\ \Leftrightarrow 3c_n &= c_{n+1} - 2 \\ \Leftrightarrow c_{n+1} &= 3c_n + 2 \end{aligned}$$

を得る。

(答) $c_{n+1} = 3c_n + 2$

(2)

(1)の結果より、

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 3c_n + 2 \\ \Leftrightarrow c_{n+1} + 1 &= 3(c_n + 1) \end{aligned}$$

であるから、

$$c_n + 1 = 3^{n-1}(c_1 + 1)$$

となる。 $a_1 = \frac{1}{2}$ より

$$c_1 = \frac{1}{a_1} = 2$$

であるから、

$$\begin{aligned} c_n &= 3^{n-1}(2+1) - 1 \\ &= 3^n - 1 \end{aligned}$$

である。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{c_n} \\ &= \frac{1}{3^n - 1} \end{aligned}$$

である。

(答) $a_n = \frac{1}{3^n - 1}$

(3)

(2)の結果を用いると、数列 $\{b_n\}$ の漸化式は

$$b_{n+1} = b_n + n(3^n - 1)$$

となるので、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k(3^k - 1) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k \cdot 3^k - k) \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot 3^k \\ &= 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + (n-2) \cdot 3^{n-2} + (n-1) \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

とおくと、

$$3S = 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + \cdots + (n-3) \cdot 3^{n-2} + (n-2) \cdot 3^{n-1} + (n-1) \cdot 3^n$$

であるから、 S は

$$\begin{aligned} 3S - S &= -(3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-2} + 3^{n-1}) + (n-1) \cdot 3^n \\ \Leftrightarrow 2S &= -\frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} + (n-1) \cdot 3^n \\ \Leftrightarrow 2S &= -\frac{3^n - 3}{2} + (n-1) \cdot 3^n \\ \Leftrightarrow S &= \frac{2n-3}{4} \cdot 3^n + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

と計算できる。したがって、 $n \geq 2$ について

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k \cdot 3^k - k) \\ &= 1 + S - \frac{n(n-1)}{2} \\ &= 1 + \left(\frac{2n-3}{4} \cdot 3^n + \frac{3}{4} \right) - \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{2n-3}{4} \cdot 3^n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときにも成り立つので、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \frac{2n-3}{4} \cdot 3^n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{7}{4}$$

である。

(答) $b_n = \frac{2n-3}{4} \cdot 3^n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{7}{4}$

(1)

点Dは辺BCを1:2に内分することから、 $\overrightarrow{AD}$ は

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

と表せる。ここで、 $\overrightarrow{AE}$ を実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{AE} = s\vec{b} + t\vec{c}$$

と表すと、線分ADに関して点Eが点Bと対称であるから、 $AD \perp BE$ より

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) \cdot \{(s-1)\vec{b} + t\vec{c}\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2s-2}{3}|\vec{b}|^2 + \frac{s+2t-1}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{t}{3}|\vec{c}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2s-2}{3} + \frac{s+2t-1}{3} + t = 0$$

$$\Leftrightarrow s + \frac{5}{3}t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow s = -\frac{5}{3}t + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、線分ABと線分AEの長さが等しいことから

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AE}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{b}|^2 = |s\vec{b} + t\vec{c}|^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = s^2|\vec{b}|^2 + 2st\vec{b} \cdot \vec{c} + t^2|\vec{c}|^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = s^2 + 2st + 3t^2$$

が成り立つので、これに①を代入して、

$$1 = s^2 + 2st + 3t^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = \left(-\frac{5}{3}t + 1\right)^2 + 2\left(-\frac{5}{3}t + 1\right)t + 3t^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{22}{9}t^2 - \frac{4}{3}t = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{22}{9}t\left(t - \frac{6}{11}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0, \frac{6}{11}$$

となる。 $t=0$ のとき、①より $s=1$ となるが、このとき点Eが点Bと一致するため不適である。

したがって $t=\frac{6}{11}$ であり、このとき①より $s=\frac{1}{11}$ であるから、 $\overrightarrow{AE}$ は

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{11}\vec{b} + \frac{6}{11}\vec{c}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AE} = \frac{1}{11}\vec{b} + \frac{6}{11}\vec{c}$$

(2)

$\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AE}$ ($k > 0$) とおくと、

$$\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AE}$$

$$= \frac{1}{11}k\vec{b} + \frac{6}{11}k\vec{c}$$

となる。点Fは辺BC上の点であることから

$$\frac{1}{11}k + \frac{6}{11}k = 1$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{11}{7}$$

であるので、 $\overrightarrow{AF}$ は

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{11}k\vec{b} + \frac{6}{11}k\vec{c}$$

$$= \frac{1}{7}\vec{b} + \frac{6}{7}\vec{c}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{7}\vec{b} + \frac{6}{7}\vec{c}$$

(3)

(2)の結果より、点Fは辺BCを6:1に内分する点であるから、

$$BF = \frac{6}{7}BC$$

である。また、点Dは辺BCを1:2に内分する点であるから、

$$BD = \frac{1}{3}BC$$

である。したがって、

$$DF = BF - BD$$

$$= \frac{6}{7}BC - \frac{1}{3}BC$$

$$= \frac{11}{21}BC$$

より、

$$DF : BC = 11 : 21$$

である。

$$(\text{答}) \quad DF : BC = 11 : 21$$

(1)

$f(x)$ を x について微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 18x + 24 \\ &= 3(x-2)(x-4) \end{aligned}$$

となるから, $y=f(x)$ の増減表は以下ようになる。

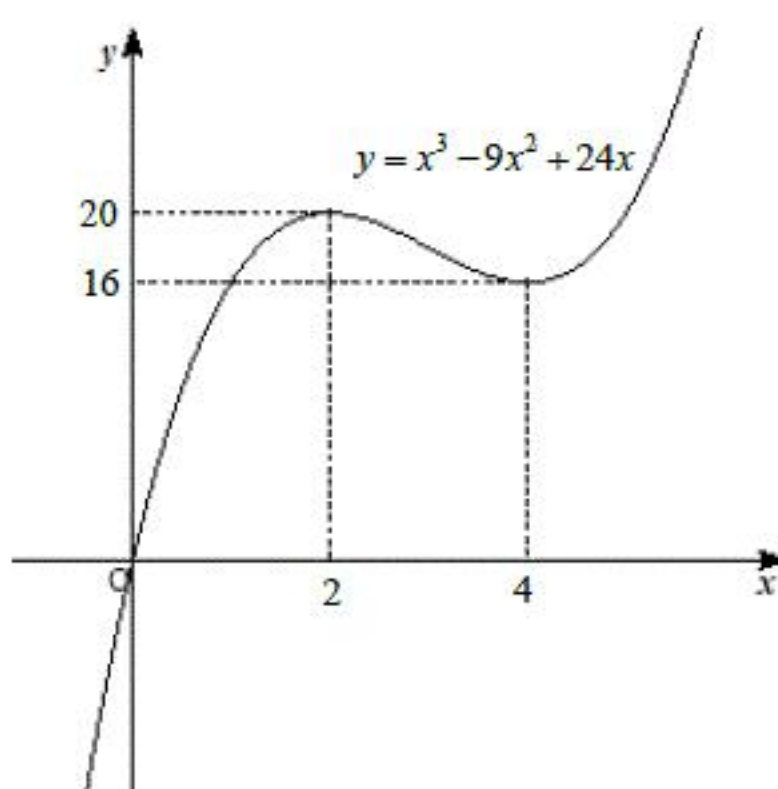
x	...	2	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$f(2)$	↘	$f(4)$	↗

増減表より, $y=f(x)$ は,

$$x=2 \text{ のとき, 極大値 } f(2)=20$$

$$x=4 \text{ のとき, 極小値 } f(4)=16$$

を取る。従って, $y=f(x)$ のグラフの概形は以下ようになる。



(答) 前表および前図

(2)

$$f(x) = kx$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + (24-k)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\{x^2 - 9x + (24-k)\} = 0$$

$$\therefore x=0, x^2 - 9x + (24-k) = 0$$

であるから, 方程式 $x^2 - 9x + (24-k) = 0$ の解の個数について考える。 $x^2 - 9x + (24-k) = 0$ の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} D &= 81 - 4(24-k) \\ &= 4k - 15 \end{aligned}$$

であるから, D の正負により場合分けをして考える。

[1] $D < 0$ つまり $k < \frac{15}{4}$ のとき

このとき, 2 次方程式 $x^2 - 9x + (24-k) = 0$ は実数解を持たない。従って, 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=kx$ の共有点は 1 個である。

[2] $D = 0$ つまり $k = \frac{15}{4}$ のとき

このとき, 2 次方程式 $x^2 - 9x + \frac{81}{4} = 0$ は重解 $x = \frac{9}{2}$ を持つ。従って, 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=kx$ の共有点の個数は 2 個である。

[3] $D > 0$ つまり $k > \frac{15}{4}$ のとき

このとき, 2 次方程式 $x^2 - 9x + (24-k) = 0$ は異なる 2 つの実数解を持つ。ここで, $x^2 - 9x + (24-k) = 0$ が $x=0$ を解に持つのは,

$$\begin{aligned} 24-k &= 0 \\ \therefore k &= 24 \end{aligned}$$

の場合のみである。従って, 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=kx$ の共有点の個数は, $k=24$ のとき 2 個, $\frac{15}{4} < k < 24, 24 < k$ のとき 3 個である。

以上, [1], [2], [3] より, 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=kx$ の共有点の個数は,

$$k < \frac{15}{4} \text{ のとき, 1 個}$$

$$k = \frac{15}{4}, 24 \text{ のとき, 2 個}$$

$$\frac{15}{4} < k < 24, 24 < k \text{ のとき, 3 個}$$

である。

(答) $k < \frac{15}{4}$ のとき 1 個, $k = \frac{15}{4}, 24$ のとき 2 個, $\frac{15}{4} < k < 24, 24 < k$ のとき 3 個

(1)

コマがAにあるとき、さいころの出た目と止まるマス目の関係は以下の表に示す通りである。

さいころの目	止まるマス目
1	B
2	C
3	B
4	A
5	B
6	C

1回の操作で終了するとき、上表よりさいころの目が2, 6であれば良いことから、

$$p_1 = \frac{1}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_1 = \frac{1}{3}$$

(2)

コマがBにあるとき、さいころの出た目と止まるマス目の関係は以下の表に示す通りである。

さいころの目	止まるマス目
1	C
2	B
3	A
4	B
5	C
6	B

(1)より、1回の操作でAからA, B, Cに移動する確率はそれぞれ $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ であり、上表より、1

回の操作でBからA, B, Cに移動する確率はそれぞれ $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ である。従って、コマがA, Bど

ちらのマス目にあっても、次の操作においてあるマス目に移動する確率は等しい。よって、求める確率は、

$$\begin{aligned} p_2 &= (1 - p_1) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_2 = \frac{2}{9}$$

(3)

n 回目までのいずれかの操作で終了する確率を q_n とすると、

$$q_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

である。 $n+1$ 回目までのいずれかの操作で終了する確率は、 n 回目までのいずれかの操作で終了する確率と $n+1$ 回目で終了する確率の和に等しいから、

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + (1 - q_n) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}q_n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore q_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(q_n - 1)$$

である。よって、数列 $\{q_n - 1\}$ は初項 $q_1 - 1 = -\frac{2}{3}$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} q_n - 1 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\ \therefore q_n &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

である。従って、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} p_n &= (1 - q_{n-1}) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

であり、これは $n=1$ のときにも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$