$\boxed{1}$

(1)

$f(x)$ を x について微分すると,

$$f'(x)=3x^2-18x+24$$
$$=3(x-2)(x-4)$$

となるから，$y=f(x)$ の増減表は以下のようになる。

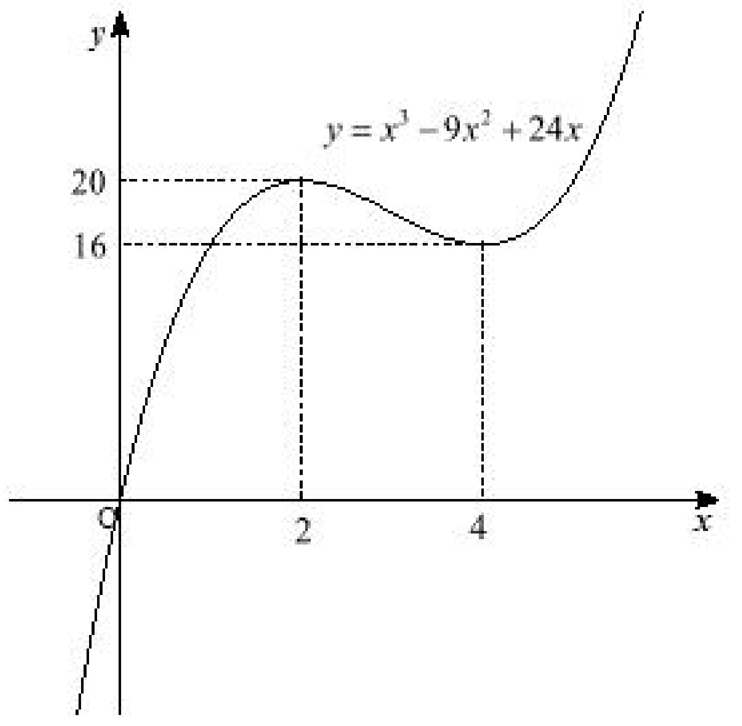
x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$f(2)$	↘	$f(4)$	↗

増減表より，$y=f(x)$ は,

$x=2$ のとき，極大値 $f(2)=20$

$x=4$ のとき，極小値 $f(4)=16$

を取る。従って，$y=f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる。



(答) 前表および前図

(2)

$$f(x)=kx$$
$$\Leftrightarrow x^3-9x^2+(24-k)x=0$$
$$\Leftrightarrow x\{x^2-9x+(24-k)\}=0$$
$$\therefore x=0,\ x^2-9x+(24-k)=0$$

であるから，方程式 $x^2-9x+(24-k)=0$ の解の個数について考える。$x^2-9x+(24-k)=0$ の判別式を D とすると,

$$D=81-4(24-k)$$
$$=4k-15$$

であるから，D の正負により場合分けをして考える。

[1] $D<0$ つまり $k<\frac{15}{4}$ のとき

このとき，2 次方程式 $x^2-9x+(24-k)=0$ は実数解を持たない。従って，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=kx$ の共有点は1個である。

[2] $D=0$ つまり $k=\frac{15}{4}$ のとき

このとき，2 次方程式 $x^2-9x+\frac{81}{4}=0$ は重解 $x=\frac{9}{2}$ を持つ。従って，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=kx$ の共有点の個数は2個である。

[3] $D>0$ つまり $k>\frac{15}{4}$ のとき

このとき，2 次方程式 $x^2-9x+(24-k)=0$ は異なる2つの実数解を持つ。ここで，$x^2-9x+(24-k)=0$ が $x=0$ を解に持つのは,

$$24-k=0$$
$$\therefore k=24$$

の場合のみである。従って，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=kx$ の共有点の個数は，$k=24$ のとき2個，$\frac{15}{4}<k<24,\ 24<k$ のとき3個である。

以上, [1], [2], [3]より，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=kx$ の共有点の個数は,

$k<\frac{15}{4}$ のとき，1個

$k=\frac{15}{4},\ 24$ のとき，2個

$\frac{15}{4}<k<24,\ 24<k$ のとき，3個

である。

(答) $k<\frac{15}{4}$ のとき1個，$k=\frac{15}{4},\ 24$ のとき2個，$\frac{15}{4}<k<24,\ 24<k$ のとき3個

(3)

$$x^3-9x^2+24x=6x$$
$$\Leftrightarrow x^3-9x^2+18x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-3)(x-6)=0$$
$$\therefore x=0,\ 3,\ 6$$

である。$0<x<3$ のとき $f(x)>kx$ であり，$3<x<6$ のとき $f(x)<kx$ であるから,

$$S=\int_0^3(x^3-9x^2+18x)dx+\int_3^6(-x^3+9x^2-18x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+9x^2\right]_0^3-\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+9x^2\right]_3^6$$
$$=\frac{81}{2}$$

である。

(答) $S=\frac{81}{2}$

$\boxed{2}$

(1)

△ABC の面積 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot3-1^2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

と求められる。

(答) $S_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2)

点 D は辺 BC を $1:2$ に内分することから，$\overrightarrow{AD}$ は

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

と表せる。ここで，$\overrightarrow{AE}$ を実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{AE}=s\vec{b}+t\vec{c}$$

と表すと，線分 AD に関して点 E が点 B と対称であるから，AD⊥BE より

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=0$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)\cdot\left\{(s-1)\vec{b}+t\vec{c}\right\}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{2s-2}{3}\left|\vec{b}\right|^2+\frac{s+2t-1}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{t}{3}\left|\vec{c}\right|^2=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{2s-2}{3}+\frac{s+2t-1}{3}+t=0$$
$$\Leftrightarrow s+\frac{5}{3}t-1=0$$
$$\Leftrightarrow s=-\frac{5}{3}t+1 \qquad \cdots ①$$

が成り立つ。また，線分 AB と線分 AE の長さが等しいことから

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AE}\right|^2$$
$$\Leftrightarrow\left|\vec{b}\right|^2=\left|s\vec{b}+t\vec{c}\right|^2$$
$$\Leftrightarrow1=s^2\left|\vec{b}\right|^2+2st\vec{b}\cdot\vec{c}+t^2\left|\vec{c}\right|^2$$
$$\Leftrightarrow1=s^2+2st+3t^2$$

が成り立つので，これに①を代入して，

$$1=s^2+2st+3t^2$$
$$\Leftrightarrow1=\left(-\frac{5}{3}t+1\right)^2+2\left(-\frac{5}{3}t+1\right)t+3t^2$$
$$\Leftrightarrow\frac{22}{9}t^2-\frac{4}{3}t=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{22}{9}t\left(t-\frac{6}{11}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow t=0,\ \frac{6}{11}$$

となる。$t=0$ のとき，①より $s=1$ となるが，このとき点 E が点 B と一致するため不適である。

したがって $t=\dfrac{6}{11}$ であり，このとき①より $s=\dfrac{1}{11}$ であるから，$\overrightarrow{AE}$ は

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{11}\vec{b}+\frac{6}{11}\vec{c}$$

と表せる。

(答) $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{11}\vec{b}+\dfrac{6}{11}\vec{c}$

(3)

$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AE}\ (k>0)$ とおくと，

$$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AE}$$
$$=\frac{1}{11}k\vec{b}+\frac{6}{11}k\vec{c}$$

となる。点 F は辺 BC 上の点であることから

$$\frac{1}{11}k+\frac{6}{11}k=1$$
$$\Leftrightarrow k=\frac{11}{7}$$

であるので，$\overrightarrow{AF}$ は

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{11}k\vec{b}+\frac{6}{11}k\vec{c}$$
$$=\frac{1}{7}\vec{b}+\frac{6}{7}\vec{c}$$

と表せる。

(答) $\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{7}\vec{b}+\dfrac{6}{7}\vec{c}$

(4)

(3)の結果より，点 F は辺 BC を $6:1$ に内分する点であるから，

$$BF=\frac{6}{7}BC$$

である。また，点 D は辺 BC を $1:2$ に内分する点であるから，

$$BD=\frac{1}{3}BC$$

である。したがって，

$$DF=BF-BD$$
$$=\frac{6}{7}BC-\frac{1}{3}BC$$
$$=\frac{11}{21}BC$$

より，

$$DF:BC=11:21$$

である。

(答) $DF:BC=11:21$

(5)

(3)の結果より，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{11}{7}\overrightarrow{AE}$ であるから，

$$EF:AF=4:11$$

である。したがって，△ADF の面積を S_3 とすると，△DEF の面積 S_2 は

$$S_2=\frac{4}{11}S_3$$

と表せる。また(4)の結果より，S_3 は△ABC の面積 S_1 を用いて

$$S_3=\frac{11}{21}S_1$$

と表せる。よって，S_2 の値は

$$S_2=\frac{4}{11}S_3$$
$$=\frac{4}{11}\cdot\frac{11}{21}S_1$$
$$=\frac{4}{21}S_1$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{21}$$

である。

(答) $S_2=\dfrac{2\sqrt{2}}{21}$

$\boxed{3}$

(1)

tの範囲は，$0 \leqq t \leqq 2$であるから，$1 \leqq e^t \leqq e^2$であるので，$0 \leqq x \leqq 1$の場合と$1 \leqq x \leqq e$の場合で場合分けする。

[1] $0 \leqq x \leqq 1$のとき

$0 \leqq t \leqq 2$の範囲で，

$$e^t - x^2 \geqq 0$$

であるから，

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^2 \left(e^t - x^2\right) dt \\ &= \left[e^t - x^2 t\right]_0^2 \\ &= -2x^2 + e^2 - 1 \end{aligned}$$

である。

[2] $1 \leqq x \leqq e$のとき

$0 \leqq t \leqq 2\log x$のとき

$$e^t - x^2 \leqq 0$$

であり，$2\log x \leqq t \leqq 2$のとき

$$e^t - x^2 \geqq 0$$

であるから，

$$\begin{aligned} f(x) &= -\int_0^{2\log x} \left(e^t - x^2\right) dt + \int_{2\log x}^2 \left(e^t - x^2\right) dt \\ &= -\left[e^t - x^2 t\right]_0^{2\log x} + \left[e^t - x^2 t\right]_{2\log x}^2 \\ &= 4x^2 \log x - 4x^2 + e^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]から答えは，$0 \leqq x \leqq 1$のとき$f(x) = -2x^2 + e^2 - 1$，$1 \leqq x \leqq e$のとき$f(x) = 4x^2 \log x - 4x^2 + e^2 + 1$である。

(答) $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + e^2 - 1 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 4x^2 \log x - 4x^2 + e^2 + 1 & (1 \leqq x \leqq e) \end{cases}$

(2)

$0 \leqq x \leqq 1$において，$f(x) = -2x^2 + e^2 - 1$より，

$$f'(x) = -4x$$

であるので，$0 \leqq x \leqq 1$で$f(x)$は単調減少する。また，$1 \leqq x \leqq e$において，$f(x) = 4x^2 \log x - 4x^2 + e^2 + 1$であるから，

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x \log x + 4x^2 \cdot \frac{1}{x} - 8x \\ &= 8x \log x - 4x \\ &= 4x(2\log x - 1) \end{aligned}$$

である。このとき，

$$2\log x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e} \ (\because 1 \leqq x \leqq e)$$

となるので，全体の増減表は下のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$e^2 - 1$	↘	$e^2 - 3$	↘	$e^2 - 2e + 1$	↗	$e^2 + 1$

増減表より，$x = e$のとき$f(x)$は最大値$e^2 + 1$，$x = \sqrt{e}$のとき$f(x)$は最小値$e^2 - 2e + 1$となる。

(答) $x = e$のとき$f(x)$は最大値$e^2 + 1$，$x = \sqrt{e}$のとき$f(x)$は最小値$e^2 - 2e + 1$

$\boxed{4}$

(1)

$$
\begin{aligned}
z_2 &= z_1 w^3 \\
&= w^4 \\
&= r^4\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)^4
\end{aligned}
$$

と変形できる。したがって，ド・モアブルの定理より，

$$
\begin{aligned}
z_2 &= r^4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
&= r^4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)
\end{aligned}
$$

となる。

（答） $z_2 = r^4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)$

(2)

$n \geqq 2$ に対して，

$$
\begin{aligned}
z_n &= z_{n-1} w^{n+1} \\
&= z_{n-2} w^n w^{n+1} \\
&= \cdots \\
&= z_1 w^3 w^4 \cdots w^n w^{n+1} \\
&= w^{1+3+4+\cdots+n+(n+1)} \\
&= w^{1+2+3+4+\cdots+n+(n+1)-2} \\
&= w^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-2} \\
&= w^{\frac{n^2+3n-2}{2}} \\
&= r^{\frac{n^2+3n-2}{2}}\left(\cos\frac{n^2+3n-2}{48}\pi+i\sin\frac{n^2+3n-2}{48}\pi\right)
\end{aligned}
$$

と変形でき，$n=1$ のときにも上式は成り立つ。したがって，z_n の偏角の1つは $\dfrac{n^2+3n-2}{48}\pi$ となる。

（答） $\dfrac{n^2+3n-2}{48}\pi$

(3)

$\angle\mathrm{O}$ は $z_n,\ z_{n+1}$ の偏角の差であり，与えられた条件より $\angle\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{3}$ であることから，m を整数として

$$
\begin{aligned}
&\frac{(n+1)^2+3(n+1)-2}{48}\pi-\frac{n^2+3n-2}{48}\pi=\pm\frac{\pi}{3}+2m\pi \\
\Leftrightarrow\ &\frac{2n+4}{48}\pi=\pm\frac{\pi}{3}+2m\pi \\
\Leftrightarrow\ &n=6+48m,\ -10+48m
\end{aligned}
$$

のいずれかが成り立つ。いま，与えられた条件 $7 \leqq n \leqq 48$ より，$n=-10+48m$ で $m=1$ のときのみ条件を満たし，$n=38$ となる。このとき，

$$
\begin{aligned}
z_{38} &= r^{778}\left(\cos\frac{778}{24}\pi+i\sin\frac{778}{24}\pi\right) \\
&= r^{778}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{39} &= r^{818}\left(\cos\frac{818}{24}\pi+i\sin\frac{818}{24}\pi\right) \\
&= r^{818}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)
\end{aligned}
$$

となり，z_n の偏角 θ は $\theta=\dfrac{5}{12}\pi$ となる。いま，$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}$ は $\angle\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{3}$ を満たす直角三角形であり，

与えられた条件 $r>1$ より $\mathrm{OP}_n<\mathrm{OP}_{n+1}$ であることに注意すると，$\angle\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}=\dfrac{\pi}{2}$ であることがわかり，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{OP}_n:\mathrm{OP}_{n+1}=1:2 \\
\Leftrightarrow\ &r^{778}:r^{818}=1:2 \\
\Leftrightarrow\ &2r^{778}=r^{818} \\
\therefore\ &r=2^{\frac{1}{40}}
\end{aligned}
$$

となる。

（答） $n=38,\ r=2^{\frac{1}{40}},\ \theta=\dfrac{5}{12}\pi$