

2015 年度

M 3

数 学

2 月 25 日 (水)

理 学 部 (数学科)

9 : 30 ~ 11 : 30

【前 期 日 程】

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れてはいけません。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙（4 枚）に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、5 ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出なさい。
- 4 新教育課程履修者は、問題 1 から問題 4 の 4 問を解答しなさい。
(新教育課程履修者は旧教育課程履修者用選択問題 4（以下、旧問題 4 とする）は選択できません。)
- 5 旧教育課程履修者は、問題 1 から問題 3 の 3 問と、問題 4 と旧問題 4 のうちどちらか 1 問の合計 4 問を解答しなさい。
- 6 旧教育課程履修者で旧問題 4 を選択した場合は、第 4 問の解答用紙の問題番号欄の右の 旧 を ☐ で囲みなさい。
- 7 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
- 8 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記しなさい。
- 9 問題は、声を出して読むではいけません。
- 10 各問の配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 11 問題冊子は、必ず持ち帰りなさい。

1 $\triangle ABC$ において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおき、 $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = \sqrt{3}$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$ であるとする。辺 BC を $1:2$ に内分する点を D , 線分 AD に関して B と対称な点を E , 直線 AE と辺 BC の交点を F とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の面積 S_1 を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{AE}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (3) $\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (4) $DF:BC$ を求めよ。
- (5) $\triangle DEF$ の面積 S_2 を求めよ。

(配点 25 %)

- 2 1つのコマと下の図のような3つのマス目 A, B, C がある。コマが A または B にあるとき, さいころを投げて出た目の数だけ C の方向にコマを進める。ただし, コマが途中で C や A に来たら, 逆の方向に折り返して進める。これを1回の操作とする。A または B で止まった場合はその止まったマス目から操作を繰り返し, C に止まった場合は操作を終了する。例えば, A にコマがあり 3 の目が出たら $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B$ とコマを進め, 続けて操作を繰り返したとき 5 の目が出たら $B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ と進めて操作を終了する。

最初にコマを A に置いて操作を始めるとき, 次の問いに答えよ。

A	B	C
---	---	---

- (1) 1回の操作で終了する確率 p_1 を求めよ。
- (2) 2回の操作で終了する確率 p_2 を求めよ。
- (3) n 回の操作で終了する確率 p_n を n を用いて表せ。

(配点 25 %)

3 e を自然対数の底とし, $0 \leq x \leq e$ とする。関数 $f(x) = \int_0^2 |e^t - x^2| dt$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) 定積分を計算し, $f(x)$ を x を用いて表せ。
- (2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また, それらの値をとるときの x の値もそれぞれ求めよ。

(配点 25 %)

- 4 i を虚数単位, r を 1 より大きい実数とし, $w = r \left(\cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24} \right)$ とおく。また, 数列 $\{z_n\}$ を次の式で定める。

$$z_1 = w, \quad z_{n+1} = z_n w^{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) z_2 を r を用いて表せ。
- (2) z_n の偏角の 1 つを n を用いて表せ。
- (3) 複素数平面で原点を O , z_n で表される点を P_n とする。 $7 \leq n \leq 48$ のとき, $\triangle P_n O P_{n+1}$ が $\angle O = \frac{\pi}{3}$ を満たす直角三角形となるような n と r をそれぞれ求めよ。また, そのときの z_n の偏角 θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で求めよ。

(配点 25 %)

旧教育課程履修者用選択問題 (新教育課程履修者は選択できません。)

- 4 r を 1 より大きい実数とし, $A = r \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{24} & -\sin \frac{\pi}{24} \\ \sin \frac{\pi}{24} & \cos \frac{\pi}{24} \end{pmatrix}$ とおく。また, xy 平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次の式で定める。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+2} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 点 P_2 の座標を r を用いて表せ。
- (2) xy 平面上で原点 O と点 $X(1, 0)$ について, 半直線 OX を始線とし, 半直線 OP_n を動径とすると, 動径 OP_n の表す角の 1 つを n を用いて表せ。
- (3) $7 \leq n \leq 48$ のとき, $\triangle P_n OP_{n+1}$ が $\angle O = \frac{\pi}{3}$ を満たす直角三角形となるような n と r をそれぞれ求めよ。また, そのとき OX を始線とする動径 OP_n の表す角を θ として, θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で求めよ。

(配点 25 %)