

(1)

与えられた条件より

$$|\overline{AB}| = |\overline{AD}| = 1, \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0, \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}, \overline{BC} = \overline{AD}$$

である。これを用いると

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{AD} &= (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{AD} \\ &= (\overline{AB} + \overline{AD}) \cdot \overline{AD} \\ &= 1 \end{aligned}$$

とわかる。

(答) 1

(2)

与えられた条件より

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{DC} \\ \Leftrightarrow \overline{PB} - \overline{PA} &= \overline{PC} - \overline{PD} \\ \therefore \overline{PA} + \overline{PC} &= \overline{PB} + \overline{PD} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

(2)の結果より

$$\begin{aligned} &\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{PB} \cdot \overline{PC} + \overline{PC} \cdot \overline{PD} + \overline{PD} \cdot \overline{PA} \\ &= \overline{PA} \cdot (\overline{PB} + \overline{PD}) + \overline{PC} \cdot (\overline{PB} + \overline{PD}) \\ &= (\overline{PA} + \overline{PC}) \cdot (\overline{PB} + \overline{PD}) \\ &= (\overline{PA} + \overline{PC}) \cdot (\overline{PA} + \overline{PC}) \\ &= |\overline{PA} + \overline{PC}|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} \overline{PA} + \overline{PC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overline{PA} + (\overline{AC} - \overline{AP}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\overline{AP} &= \overline{AC} \\ \Leftrightarrow 2\overline{AP} &= \overline{AB} + \overline{AD} \\ \therefore \overline{AP} &= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AD}) \end{aligned}$$

をみたすとき, 等号が成立する。したがって,

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AD})$$

のとき, 与えられた式は最小値 0 をとる。

(答) 最小値: 0, $\overline{AP} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AD})$

(1)

3 次関数 $f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax + b$ について

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6(a+1)x + 6a \\ &= 6(x-1)(x-a) \end{aligned}$$

となる。関数 $f(x)$ が極値をもつことは、2 次方程式 $f'(x) = 0$ が相異なる 2 つの実数解をもつことと同値であるから、求める条件は

$$a \neq 1$$

である。

(答) $a \neq 1$

(2)

まず、方程式 $f(x) = 0$ が相異なる 3 つの実数解をもつためには、関数 $f(x)$ が極値をもち、極大値と極小値の符号が異なればよい。したがって、方程式 $f(x) = 0$ が相異なる 3 つの実数解をもつための必要十分条件は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a \neq 1 \\ f(1)f(a) < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a \neq 1 \\ (3a+b-1)(-a^3+3a^2+b) < 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。さらに、これら 3 つの実数解がすべて正であるためには、関数 $f(x)$ が極値をとるときの x の値がともに正であり、 $f(0)$ が負となればよい。すなわち

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a > 0 \\ f(0) < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

をみたせばよい。したがって、求めるべき条件は①かつ②である。ここで、 $y = x^3 - 3x^2$ とすると

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

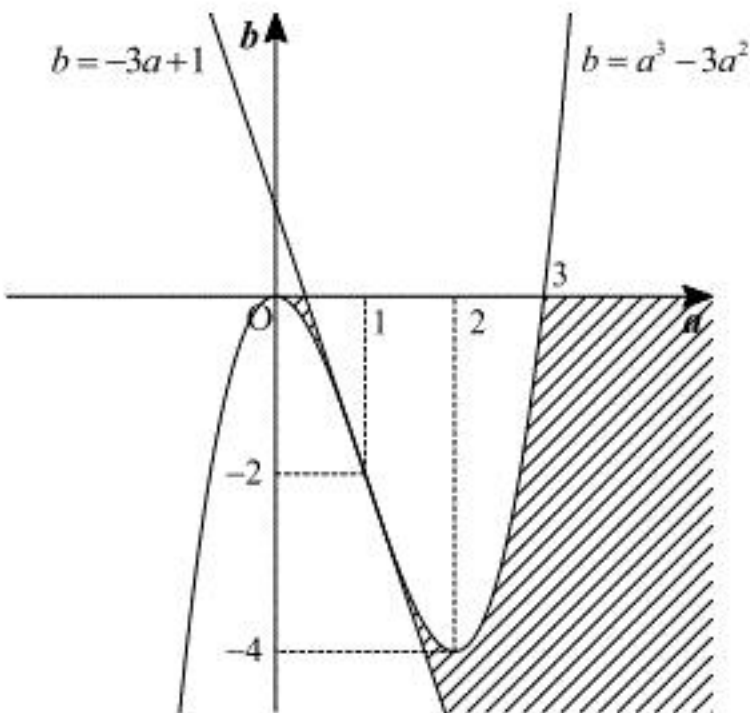
より、 $y = x^3 - 3x^2$ の点 $(1, -2)$ における接線は

$$\begin{aligned} y &= -3(x-1) - 2 \\ \Leftrightarrow y &= -3x + 1 \end{aligned}$$

である。また、曲線 $y = x^3 - 3x^2$ の増減表は下表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

よって、条件を満たす点 (a, b) の全体を座標平面上に図示すると下図の斜線部のようになる。ただし、境界はすべて含まない。



なお、上図より、求めた条件のうち、 $a \neq 1$ は他の条件に含まれていることがわかる。

$$\text{(答)} \quad \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ (3a+b-1)(-a^3+3a^2+b) < 0 \end{cases}, \text{ 前図}$$

(3)

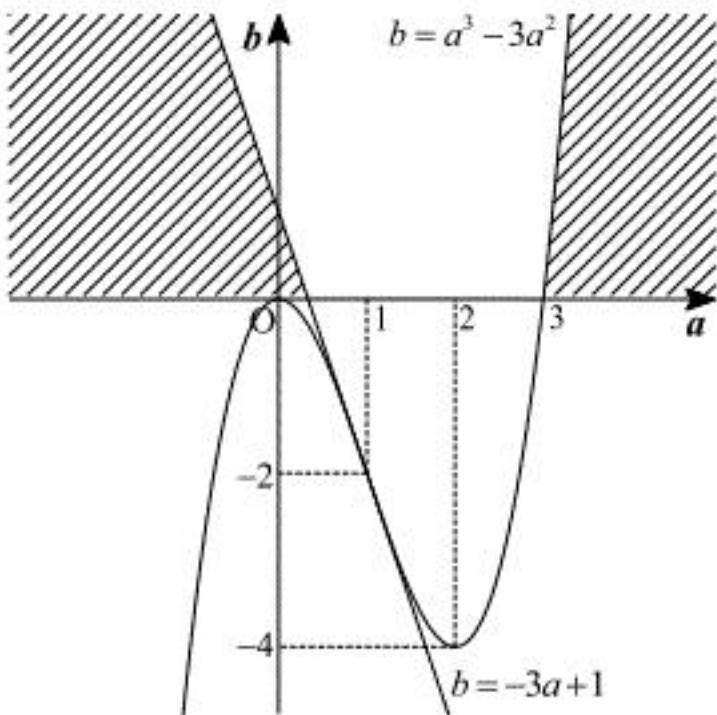
方程式 $f(x) = 0$ が 2 つの相異なる正の実数解と 1 つの負の実数解をもつためには、①に加えて

$$f(0) > 0$$

をみたせばよい。したがって、求める条件は

$$\begin{cases} a \neq 1 \\ (3a+b-1)(-a^3+3a^2+b) < 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

である。よって、条件を満たす点 (a, b) の全体を座標平面上に図示すると以下の斜線部のようになる。ただし、境界はすべて含まない。



$$\text{(答)} \quad \begin{cases} a \neq 1 \\ (3a+b-1)(-a^3+3a^2+b) < 0, \text{ 前図} \\ b > 0 \end{cases}$$

(1)

2以上の自然数 k について

$$\begin{aligned}
{}_{k+4}C_5 - {}_{k+3}C_5 &= \frac{(k+4)!}{5!\{(k+4)-5\}!} - \frac{(k+3)!}{5!\{(k+3)-5\}!} \\
&= \frac{(k+4)!}{5!(k-1)!} - \frac{(k+3)!}{5!(k-2)!} \\
&= \frac{(k+4)! - (k+3)!(k-1)}{5!(k-1)!} \\
&= \frac{(k+3)!\{(k+4)-(k-1)\}}{5!(k-1)!} \\
&= \frac{(k+3)!}{4!(k-1)!} \\
&= \frac{(k+3)!}{4!\{(k+3)-4\}!} \\
&= {}_{k+3}C_4
\end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

(1)の結果を用いると、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n {}_{k+3}C_4 &= {}_4C_4 + \sum_{k=2}^n {}_{k+3}C_4 \\
&= 1 + \sum_{k=2}^n ({}_{k+4}C_5 - {}_{k+3}C_5) \\
&= 1 + {}_{n+4}C_5 - {}_5C_5 \\
&= {}_{n+4}C_5 \\
&= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{120}
\end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{120}$$

(3)

 k が自然数のとき

$$\begin{aligned}
{}_{k+3}C_4 &= \frac{k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k}{24} \\
\Leftrightarrow k^4 + 6k^3 &= 24 \cdot {}_{k+3}C_4 - 11k^2 - 6k
\end{aligned}$$

であるから、(2)の結果より

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n (k^4 + 6k^3) \\
&= \sum_{k=1}^n (24 \cdot {}_{k+3}C_4 - 11k^2 - 6k) \\
&= 24 \sum_{k=1}^n {}_{k+3}C_4 - 11 \sum_{k=1}^n k^2 - 6 \sum_{k=1}^n k \\
&= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{5} - \frac{11}{6}n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)\{6(n+4)(n+3)(n+2) - 55(2n+1) - 90\}}{30} \\
&= \frac{n(n+1)(6n^3 + 54n^2 + 46n - 1)}{30}
\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{n(n+1)(6n^3 + 54n^2 + 46n - 1)}{30}$$

(1)

3年生全体の人数を x 人とすると、条件より各集団の人数は以下のようになる。

	徒歩通学	自転車通学	計
男	bcx	$b(1-c)x$	bx
女	$(a-bc)x$	$(1-a-b+bc)x$	$(1-b)x$
計	ax	$(1-a)x$	x

上表より、対象の集団を徒歩通学の生徒とするとき、その生徒が男子生徒である確率は

$$\frac{bcx}{ax} = \frac{bc}{a}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{bc}{a}$$

(2)

(1)の表より、対象の集団を3年生全体とするとき、その生徒が徒歩通学かまたは男子生徒である確率は

$$\frac{bcx + b(1-c)x + (a-bc)x}{x} = a + b - bc$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a + b - bc$$

(3)

与えられた条件より

$$x = 100, (1-a-b+bc)x = 30, a = c$$

であるから

$$1-a-b+ab = \frac{3}{10}$$

$$\Leftrightarrow (1-a)(1-b) = \frac{3}{10}$$

となる。ここで、 a, b ($0 < a < 1, 0 < b < 1$) はそれぞれ、対象の集団を3年生全体100人とするとき、その生徒が徒歩通学である確率、男子生徒である確率であるから

$$0 < p < 100, 0 < q < 100 \quad \cdots \textcircled{1}$$

をみたす自然数 p, q を用いて

$$a = \frac{100-p}{100}, b = \frac{100-q}{100}$$

と表すことができる。このとき

$$\frac{p}{100} \cdot \frac{q}{100} = \frac{3}{10}$$

$$\Leftrightarrow pq = 3000 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となり、①、②をみたす (p, q) の組は

$$(p, q) = (40, 75), (50, 60), (60, 50), (75, 40)$$

である。よって、求める a の値は

$$a = \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$$