

(1)

与えられた条件より

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 1, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

である。これより

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}| &= |\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD}| \\ &= |2\overrightarrow{CB}| \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 1, |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}| = 2$$

(2)

与えられた条件より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD} \\ \therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

(2)の結果より

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PA} \\ &= \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}) + \overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}) \\ &= (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}) \\ &= (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) \\ &= |\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ \therefore \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \end{aligned}$$

をみたすとき、等号が成立する。したがって、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

のとき、与えられた式は最小値0をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値: } 0, \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

(1)

与えられた漸化式の両辺は正より、両辺の自然対数をとると

$$\begin{aligned}\log c(a_{n+1})^n &= \log(a_n)^{n+1} \\ \Leftrightarrow n \log a_{n+1} + \log c &= (n+1) \log a_n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \log a_{n+1} &= \frac{1}{n} \log a_n - \frac{\log c}{n(n+1)}\end{aligned}$$

と変形できる。ここで

$$b_n = \frac{1}{n} \log a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

とすると、 $b_1 = \log a_1 = 0$ であり、

$$b_{n+1} = b_n - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \log c$$

となる。よって、 $n \geq 2$ のとき、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \\ &= - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \log c \\ &= - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \log c = \frac{1-n}{n} \log c\end{aligned}$$

と求まる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{1-n}{n} \log c$$

(2)

(1)の結果より、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1-n}{n} \log c \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} \log a_n &= \frac{1-n}{n} \log c \\ \Leftrightarrow \log a_n &= \log c^{1-n} \\ \therefore a_n &= c^{1-n}\end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad a_n = c^{1-n}$$

(3)

(2)の結果より、数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 1$ 、公比 $c^{-1} (\neq 1)$ の等比数列であるから

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{(c^{-1})^n - 1}{c^{-1} - 1} = \frac{1 - c^{-n}}{1 - c^{-1}}$$

である。また

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k \log a_k &= \sum_{k=1}^n k(1-k) \log c \\ &= \sum_{k=1}^n (k - k^2) \log c \\ &= \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\} \log c \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \{3 - (2n+1)\} \log c \\ &= -\frac{(n-1)n(n+1)}{3} \log c\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1 - c^{-n}}{1 - c^{-1}}, \quad \sum_{k=1}^n k \log a_k = -\frac{(n-1)n(n+1)}{3} \log c$$

(1)

 $x > 0$ において

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \log x)}{x^4} = \frac{2 \log x - 3}{x^3}$$

となるから

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = e$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

である。よって、増減表は以下のようになる。

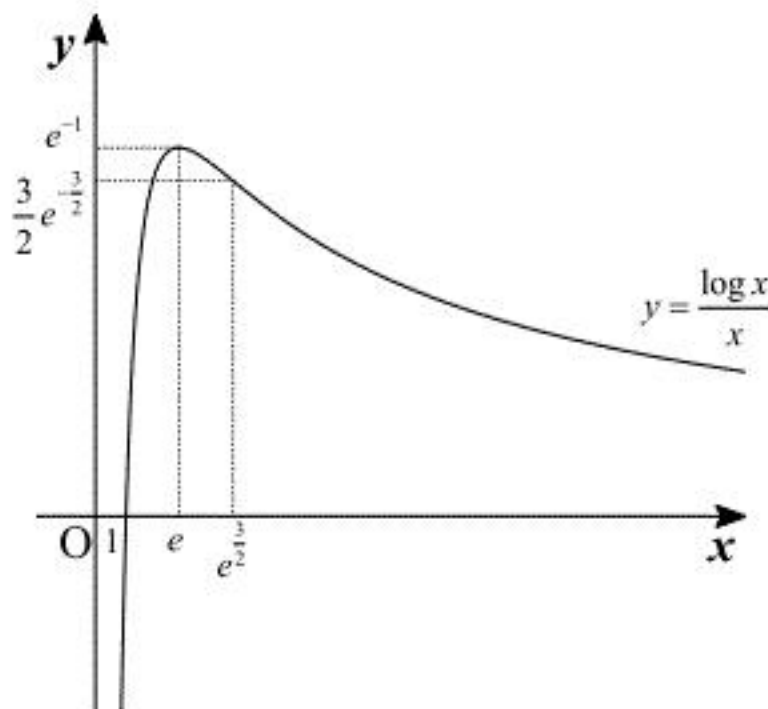
x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$
y		$\curvearrowright$	e^{-1}	$\curvearrowleft$	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	$\curvearrowright$

また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x} = -\infty$$

より、グラフの概形は以下のようになる。



(答) 前図

(2)

底の条件 $x > 0$ と $a > 0$ より、与えられた方程式の両辺の自然対数をとると

$$a^x = x^a$$

$$\Leftrightarrow x \log a = a \log x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log x}{x} = \frac{\log a}{a} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。以下、(1)の結果をふまえて、 a の値によって場合分けをする。

$$[1] \quad \frac{\log a}{a} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < a \leq 1 \text{ のとき}$$

グラフより、①を満たす正の実数 x の個数は1個である。

$$[2] \quad 0 < \frac{\log a}{a} < e^{-1} \Leftrightarrow 1 < a < e, e < a \text{ のとき}$$

グラフより、①を満たす正の実数 x の個数は2個である。

$$[3] \quad \frac{\log a}{a} = e^{-1} \Leftrightarrow a = e \text{ のとき}$$

グラフより、①を満たす正の実数 x の個数は1個である。以上、[1], [2], [3]より、 $a^x = x^a$ を満たす正の実数 x の個数は

$$\begin{cases} 1 \text{ 個} & (0 < a \leq 1, a = e \text{ のとき}) \\ 2 \text{ 個} & (1 < a < e, e < a \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} 1 \text{ 個} & (0 < a \leq 1, a = e \text{ のとき}) \\ 2 \text{ 個} & (1 < a < e, e < a \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3)

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x} dx &= \int_1^{\sqrt{e}} (\log x)' \log x dx \\ &= \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{1}{2} (\log \sqrt{e})^2 \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{8}$$

(1)

 $c=1+i$ のとき

$$\bar{c}=1-i$$

$$|c|^2=c\bar{c}=(1+i)(1-i)=2$$

である。

$$(\text{答}) \quad \bar{c}=1-i, |c|^2=2$$

(2)

 $|z|=1$ のとき、 z は $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす θ を用いて

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

とおける。このとき、ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= (\cos\theta+i\sin\theta)^{-1} \\ &= \cos(-\theta)+i\sin(-\theta) \\ &= \cos\theta-i\sin\theta\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}z+\frac{1}{z} &= (\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta) \\ &= 2\cos\theta\end{aligned}$$

であるから、 $z+\frac{1}{z}$ は実数である。

(証明終)

(3)

与えられた条件より

$$|i\alpha|=\left|\frac{i}{\alpha}\right|=|\beta|=1$$

であるから、複素数 $i\alpha, \frac{i}{\alpha}, \beta$ で表される複素数平面上の3点が、ある正三角形の3頂点であるとき、この正三角形は単位円に内接する。よって、3点 $A(i\alpha), B\left(\frac{i}{\alpha}\right), C(\beta)$ を定義すれば

$$\angle AOB = \frac{2}{3}\pi$$

である。ここで、 $\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$ とおくと

$$\arg(i\alpha) = \varphi + \frac{\pi}{2}, \arg\left(\frac{i}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

である。また、 α の実部と虚部はともに正であるから

$$\begin{aligned}0 &< \varphi < \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow 0 &< 2\varphi < \pi\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \\ \Leftrightarrow 2\varphi &= \frac{2}{3}\pi \\ \therefore \varphi &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

となるから

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

とわかる。このとき

$$\begin{aligned}i\alpha &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi \\ \frac{i}{\alpha} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

となり、3点 A, B, C が正三角形をなすことから

$$\beta = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \beta = -i$$