

2016年度

M 2

数 学

2月25日(木)

【前期日程】

情 報 学 部 (情報科学科)

理 学 部 (物理学科, 化学科)

工 学 部

9:30 ~ 11:30

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れてはいけません。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4枚)に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出なさい。
- 4 解答は、すべて解答用紙に記入しなさい。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記しなさい。
- 6 問題は、声を出して読んではいけません。
- 7 各問の配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰りなさい。

1 一辺の長さが 1 の正方形 ABCD が平面上にある。ただし、頂点 A, B, C, D は、この順に反時計回りに並んでいるものとする。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) 内積 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ とベクトルの大きさ $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}|$ の値をそれぞれ求めよ。
- (2) 点 P を平面上の点とすると、 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$ を証明せよ。
- (3) 点 P が平面上を動くとき、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PA}$ の最小値を求めよ。
また、その最小値を与える点 P について、 $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ。

(配点 25 %)

2 c は $c > 1$ を満たす定数とする。数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1 = 1, \quad c(a_{n+1})^n = (a_n)^{n+1}, \quad a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の各問に答えよ。

(1) $b_n = \frac{1}{n} \log a_n$ とする ($n = 1, 2, 3, \dots$)。ただし、 $\log$ は自然対数を表す。このとき、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 和 $\sum_{k=1}^n a_k$ と $\sum_{k=1}^n k \log a_k$ をそれぞれ求めよ。

(配点 25 %)

3 次の各問に答えよ。

- (1) 関数 $y = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) の増減, 凹凸を調べ, そのグラフの概形をかけ。ただし, $\log$ は自然対数を表す。また, 等式 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ は証明なしに用いてよい。
- (2) a を正の実数とする。このとき, $a^x = x^a$ を満たす正の実数 x の個数を調べよ。
- (3) 定積分 $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x} dx$ を求めよ。ただし, e は自然対数の底である。

(配点 25 %)

4 i を虚数単位とするとき、次の各問に答えよ。

- (1) 複素数 $c = 1 + i$ について、 c と共役な複素数 $\bar{c}$ および $|c|^2$ をそれぞれ求めよ。
- (2) 複素数 z が $|z| = 1$ を満たすとする。このとき、 $z + \frac{1}{z}$ が実数であることを証明せよ。
- (3) α, β を複素数として α の実部と虚部がともに正であるとする。また、 $|\alpha| = |\beta| = 1$ とする。複素数 $i\alpha, \frac{i}{\alpha}, \beta$ で表される複素数平面上の 3 点が、ある正三角形の 3 頂点であるとき、 α, β をそれぞれ求めよ。

(配点 25 %)