

2016年度

M 3

数 学

2月25日(木)

【前期日程】

理 学 部 (数学科)

9:30 ~ 11:30

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れてはいけません。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4枚)に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出なさい。
- 4 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記しなさい。
- 6 問題は、声を出して読むではいけません。
- 7 各問の配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰りなさい。

1 c は $c > 1$ を満たす定数とする。数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1 = 1, \quad c(a_{n+1})^n = (a_n)^{n+1}, \quad a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の各問に答えよ。

(1) $b_n = \frac{1}{n} \log a_n$ とする ($n = 1, 2, 3, \dots$)。ただし、 $\log$ は自然対数を表す。このとき、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 和 $\sum_{k=1}^n a_k$ と $\sum_{k=1}^n k \log a_k$ をそれぞれ求めよ。

(配点 25 %)

- 2 楕円 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ を C とする。また、座標平面上の点 $P(v, w)$ を通り、単位ベクトル $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ を方向ベクトルにもつ直線 ℓ の媒介変数 t による表示を

$$x = v + \alpha t, \quad y = w + \beta t$$

とする。直線 ℓ は $t = t_1, t_2$ において楕円 C とそれぞれ共有点 Q, R をもつとする。ただし、 $\alpha > 0, t_1 \leq t_2$ とする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) $t_1 + t_2$ と $t_1 t_2$ を v, w, α, β を用いてそれぞれ表せ。

(2) $|\vec{PQ}| \cdot |\vec{PR}|$ を v, w, α, β を用いて表せ。

(3) $\alpha = \beta$ のとき、 $|\vec{QR}| = \frac{6}{5}$ となる点 P の軌跡を座標平面上に図示せよ。

(配点 25 %)

3 次の各問に答えよ。

(1) $x > 1$ のとき $\log x < 2\sqrt{x} - 2$ を示し、これを用いて $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$ を求めよ。ただし、 $\log$ は自然対数を表す。

(2) 関数 $y = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) の増減、凹凸を調べ、そのグラフの概形をかけ。

(3) 定積分 I_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を以下で定義する。

$$I_n = \int_1^e \frac{(\log x)^{n-1}}{x^2} dx$$

ただし、 e は自然対数の底である。このとき、次の等式が成り立つことを示せ。

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + nI_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots(*)$$

(4) 等式 (*) を用いて、関数 $y = \frac{\log x}{x}$ のグラフと x 軸および直線 $x = e$ で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(配点 25 %)

4 α を絶対値が 1 の複素数とし、等式 $z = \alpha^2 \bar{z}$ を満たす複素数 z の表す複素数平面上的図形を S とする。ただし、 $\bar{z}$ は z と共役な複素数を表す。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) $z = \alpha^2 \bar{z}$ が成り立つことと、 $\frac{z}{\alpha}$ が実数であることは同値であることを証明せよ。また、このことを用いて、図形 S は原点を通る直線であることを示せ。
- (2) 複素数平面上的点 $P(w)$ を直線 S に関して対称移動した点を $Q(w')$ とする。このとき、 w' を w と α を用いて表せ。

(配点 25 %)