

(1)

 $q \neq s$ とすると、与式より

$$p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{r-p}{q-s}$$

と表すことができるが、 p, q, r, s は有理数であるからこの右辺は有理数となり、 $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。よって $q=s$ である。また、これを与式に代入することで $p=r$ を得る。

(証明終)

(2)

 $f(x) = ax^2 + bx - c$ より、

$$\begin{aligned} \int_0^{1+\sqrt{2}} f(x) dx &= \int_0^{1+\sqrt{2}} (ax^2 + bx - c) dx \\ &= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 - cx \right]_0^{1+\sqrt{2}} \\ &= \frac{a}{3}(7+5\sqrt{2}) + \frac{b}{2}(3+2\sqrt{2}) - c(1+\sqrt{2}) \\ &= \left(\frac{7}{3}a + \frac{3}{2}b - c \right) + \left(\frac{5}{3}a + b - c \right)\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。一方、 $\int_0^{1+\sqrt{2}} f(x) dx = -\alpha - (\alpha+3)\sqrt{2}$ であるから、

$$\left(\frac{7}{3}a + \frac{3}{2}b - c \right) + \left(\frac{5}{3}a + b - c \right)\sqrt{2} = -\alpha - (\alpha+3)\sqrt{2}$$

を得る。ここで、 a, b, c, α は有理数であるから、 $\frac{7}{3}a + \frac{3}{2}b - c, \frac{5}{3}a + b - c, -\alpha, -(\alpha+3)$ はすべて有理数であり、(1)の結果を利用すると、

$$\begin{cases} \frac{7}{3}a + \frac{3}{2}b - c = -\alpha \\ \frac{5}{3}a + b - c = -(\alpha+3) \end{cases}$$

と連立できる。ここから α を消去すると

$$\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b = 3$$

であり、これを満たす正の整数 a, b は $a=3, b=2$ のみである。これを $\frac{7}{3}a + \frac{3}{2}b - c = -\alpha$ へ代入すると

$$\begin{aligned} 7+3-c &= -\alpha \\ \therefore c &= \alpha+10 \end{aligned}$$

である。よって、 $a=3, b=2, c=\alpha+10$ である。

(答) $a=3, b=2, c=\alpha+10$

(3)

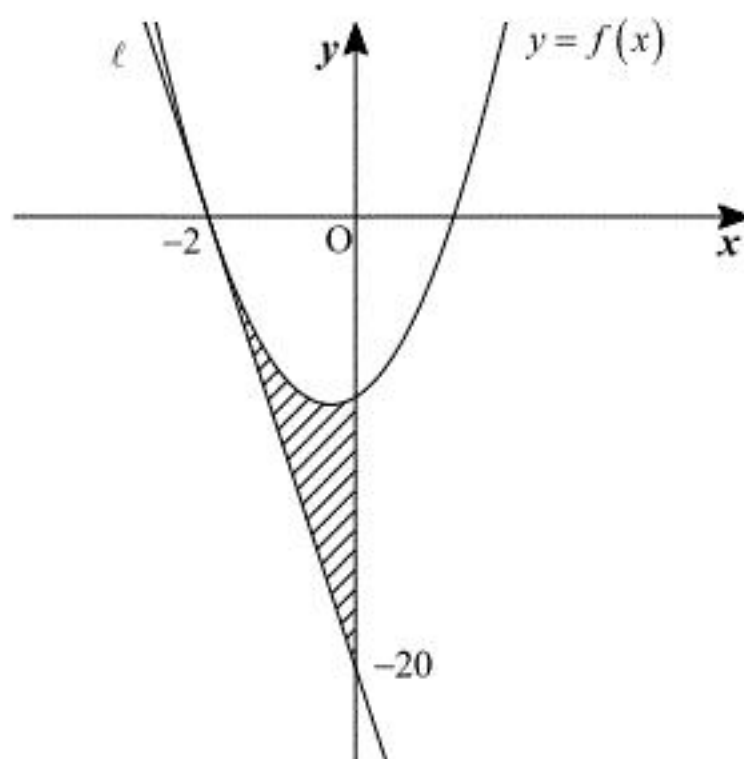
(2)の結果より $f(x) = 3x^2 + 2x - (\alpha+10)$ であるから、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\alpha^2 + \alpha - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha+2)(3\alpha-5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= -2, \frac{5}{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $c=\alpha+10$ が正の整数であるから、これに適するのは $\alpha=-2$ のみである。

(答) $\alpha=-2$

(4)



(2), (3)の結果より $f(x) = 3x^2 + 2x - 8$ であるから、 $f'(x) = 6x + 2$ となる。よって $f'(-2) = -10$, $f(-2) = 0$ であるから、接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -10(x+2) \\ &= -10x - 20 \end{aligned}$$

と求まる。ゆえに求める面積は、図の斜線部の面積に等しく、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 \{ (3x^2 + 2x - 8) - (-10x - 20) \} dx \\ &= \int_{-2}^0 (3x^2 + 12x + 12) dx \\ &= 3 \int_{-2}^0 (x+2)^2 dx \\ &= 3 \left[\frac{1}{3}(x+2)^3 \right]_{-2}^0 \\ &= 8 \end{aligned}$$

である。

(答) $S=8$

数列 $\{a_n\}, \{S_n\}$ について、関係式

$$a_1 = 2, a_n = n^2 - 2S_n + C \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立している。

(1)

$S_1 = a_1$ に注意すると、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^2 - 2S_1 + C \\ \Leftrightarrow C &= 2 - 1 + 2 \cdot 2 \\ \therefore C &= 5 \end{aligned}$$

である。

(答) $C = 5$

(2)

(1)の結果と $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1)^2 - 2S_{n+1} + 5 \\ a_n &= n^2 - 2S_n + 5 \end{aligned}$$

である。辺々引くと、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 2n + 1 - 2a_{n+1} \\ \therefore a_{n+1} &= \frac{1}{3}(a_n + 2n + 1) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2n + 1)$

(3)

$b_n = a_n - n + 1 \Leftrightarrow a_n = b_n + n - 1$ を $\textcircled{2}$ へ代入すると

$$\begin{aligned} b_{n+1} + n &= \frac{1}{3}(b_n + 3n) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= \frac{1}{3}b_n \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

であるから、数列 $\{b_n\}$ は、初項 2、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である。よって、

$$b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。

(答) $b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(4)

$\textcircled{3}$ より、 $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + n - 1$ であるから、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + k - 1 \right\} \\ &= 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{2}n(n+1) - n \\ &= 3 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\ &= -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 3 \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $S_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 3$

$$0 < A < \frac{\pi}{2}, 0 < B < \frac{\pi}{2}, 0 < C < \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a = \tan A, b = \tan B, c = \tan C \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立っている。

(1)

$$A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{\pi}{4}, C = \frac{5}{12}\pi \text{ を } \textcircled{2} \text{ へ代入し,}$$

$$a = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$b = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\begin{aligned} c &= \tan \frac{5}{12}\pi \\ &= \tan \{ \pi - (A+B) \} \\ &= -\tan(A+B) \\ &= -\frac{a+b}{1-ab} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \\ &= 2+\sqrt{3} \end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned} a+b+c &= \sqrt{3}+1+2+\sqrt{3} \\ &= 3+2\sqrt{3} \\ abc &= \sqrt{3} \cdot 1 \cdot (2+\sqrt{3}) \\ &= 3+2\sqrt{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\text{(答)} \quad \begin{cases} a = \sqrt{3}, b = 1, c = 2+\sqrt{3} \\ a+b+c = 3+2\sqrt{3} \\ abc = 3+2\sqrt{3} \end{cases}$$

(2)

①, ②より $0 < a, 0 < b, 0 < c$ であるから, $A+B \neq \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$\begin{aligned} \tan(A+B) &= \frac{a+b}{1-ab} \\ &= \frac{(a+b+c)-c}{1-ab} \\ &= \frac{abc-c}{1-ab} \\ &= -c \\ &= \tan(-C) \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} A+B &= -C+k\pi \\ \therefore A+B+C &= k\pi \quad (k \text{ は整数}) \end{aligned}$$

とかける。ゆえに、①より $A+B+C = \pi$ が成り立つ。 $A+B = \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} \tan B &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

であるから、 $a + \frac{1}{a} + c = a \cdot \frac{1}{a} \cdot c$ が成り立つ。しかし、これを満たす c は存在しないから、

$A+B = \frac{\pi}{2}$ のとき $a+b+c = abc$ は成り立たない。以上より、 $A+B+C = \pi$ が常に成り立つ。

(証明終)

(3)

$a+b+c = abc$ かつ $C = \frac{\pi}{4}$ のとき, (2)より,

$$\begin{aligned} A+B+\frac{\pi}{4} &= \pi \\ \Leftrightarrow B &= \frac{3}{4}\pi - A \end{aligned}$$

が成り立っている。 $0 < A < \frac{\pi}{2}$ かつ $0 < B = \frac{3}{4}\pi - A < \frac{\pi}{2}$ より, A の範囲は,

$$\frac{\pi}{4} < A < \frac{\pi}{2}$$

であるから, a の範囲は,

$$1 < a \quad \dots \textcircled{3}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} a+b &= \tan A + \tan\left(\frac{3}{4}\pi - A\right) \\ &= a + \frac{-1-a}{1-a} \\ &= 2 + (a-1) + \frac{2}{a-1} \end{aligned}$$

が成り立つ。③より $a-1 > 0$ であるから、相加相乗平均の不等式が使えて、

$$(a-1) + \frac{2}{a-1} + 2 \geq 2 + 2\sqrt{2}$$

となる。等号成立は、

$$\begin{aligned} a-1 &= \frac{2}{a-1} \\ \Leftrightarrow (a-1)^2 &= 2 \\ \therefore a &= 1+\sqrt{2} \end{aligned}$$

のときである。このとき、 $a=b=1+\sqrt{2}$ より $A=B$ であり、 $A+B+\frac{\pi}{4} = \pi$ が成り立っているか

ら、 $A=B=\frac{3}{8}\pi$ である。

(答) $A=B=\frac{3}{8}\pi$ のとき $a+b$ の最小値 $2+2\sqrt{2}$

(1)

与式の右辺を整理すると

$$\begin{aligned}(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 &= a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \\ &= (a^2+b^2)x^2 + (a^2+b^2)y^2 \\ &= (a^2+b^2)(x^2+y^2)\end{aligned}$$

となり、左辺と一致する。

(証明終)

(2)

α, β は A の要素であるから、整数 a, b, x, y を用いて $\alpha = a^2 + b^2, \beta = x^2 + y^2$ と表せる。

$\alpha\beta = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$ より、(1)の結果から

$$\alpha\beta = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$$

が成り立つ。 $ax+by, ay-bx$ も整数であるため、積 $\alpha\beta$ は A の要素である。

(証明終)

(3)

$5 = 1^2 + 2^2$ より、 5 は A の要素である。したがって、(2)より 5 と 5 の積 25 は A の要素である。
また、 $2 = 1^2 + 1^2$ より、 2 は A の要素である。したがって、 2 と 25 の積 50 は A の要素である。
さらに、 25 と 50 の積 1250 は A の要素である。ゆえに、 $25, 50, 1250$ は A の要素である。

(証明終)