

1

数列 $\{a_n\}, \{S_n\}$ について、関係式

$$a_1 = 2, a_n = n^2 - 2S_n + C \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立している。

(1)

$S_1 = a_1$ に注意すると、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^2 - 2S_1 + C \\ \Leftrightarrow C &= 2 - 1 + 2 \cdot 2 \\ \therefore C &= 5 \end{aligned}$$

である。

(答) $C = 5$

(2)

(1)の結果と $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1)^2 - 2S_{n+1} + 5 \\ a_n &= n^2 - 2S_n + 5 \end{aligned}$$

である。辺々引くと、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 2n + 1 - 2a_{n+1} \\ \therefore a_{n+1} &= \frac{1}{3}(a_n + 2n + 1) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2n + 1)$

(3)

$b_n = a_n - n + 1 \Leftrightarrow a_n = b_n + n - 1$ を $\textcircled{2}$ へ代入すると

$$\begin{aligned} b_{n+1} + n &= \frac{1}{3}(b_n + 3n) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= \frac{1}{3}b_n \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

であるから、数列 $\{b_n\}$ は、初項 2、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である。よって、

$$b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。

(答) $b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(4)

$\textcircled{3}$ より、 $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + n - 1$ であるから、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + k - 1 \right\} \\ &= 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{2}n(n+1) - n \\ &= 3 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\ &= -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 3 \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $S_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 3$

関数

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

について考える。

(1)

①について、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1)(x+1)^2 + 2(x-1)^2(x+1) \\ &= 4x(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

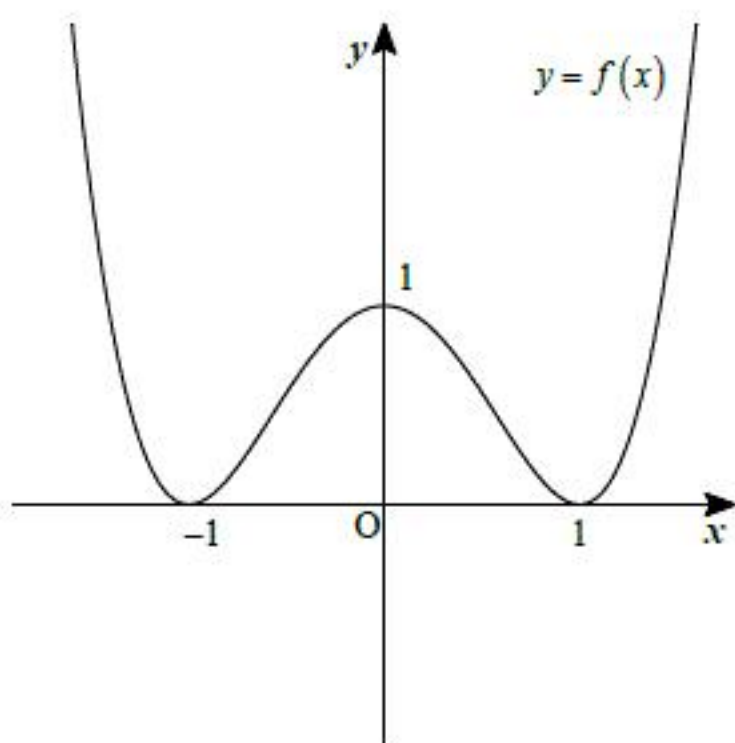
である。したがって、

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 0, 1$$

が成り立つ。よって増減表は以下のように書ける。

x	$\dots$	-1	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

以上より、 $x=0$ のとき極大値 1 、 $x=-1, 1$ のとき極小値 0 をとる。ゆえにグラフの概形は以下のように描ける。

(答) $x=0$ のとき極大値 1 、 $x=-1, 1$ のとき極小値 0 、グラフは前図

(2)

 $f'(t) = 4t(t-1)(t+1)$ より、求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 4t(t-1)(t+1)(x-t) + (t-1)^2(t+1)^2 \\ &= 4t(t-1)(t+1)x + (t^4 - 2t^2 + 1) - 4t^2(t^2 - 1) \\ &= 4t(t-1)(t+1)x - 3t^4 + 2t^2 + 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $\ell: y = 4t(t-1)(t+1)x - 3t^4 + 2t^2 + 1$

(3)

 $y = f(x)$ と $\ell: y = 4t(t-1)(t+1)x - 3t^4 + 2t^2 + 1$ から y を消去すると、

$$\begin{aligned} (x-1)^2(x+1)^2 &= 4t(t-1)(t+1)x - 3t^4 + 2t^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 4t(t-1)(t+1)x + 3t^4 - 2t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-t)^2(x^2 + 2tx + 3t^2 - 2) &= 0 \end{aligned}$$

となるから、二次方程式

$$x^2 + 2tx + 3t^2 - 2 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が $x=t$ 以外に異なる2つの解をもつ t の条件を求めればよい。②の判別式を D とおけば、②が異なる2つの解をもつ条件は、

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - (3t^2 - 2) &> 0 \\ \Leftrightarrow 2(1-t)(1+t) &> 0 \\ \therefore -1 < t < 1 &\quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。また、方程式②が $x=t$ を解に持たない条件は、

$$\begin{aligned} t^2 + 2t \cdot t + 3t^2 - 2 &\neq 0 \\ \Leftrightarrow 6t^2 - 2 &\neq 0 \\ \Leftrightarrow t \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3} &\quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

である。③、④より求める条件は、

$$-1 < t < -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} < t < \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} < t < 1$$

である。

(答) $-1 < t < -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} < t < \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} < t < 1$

関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = e^x$$

$$g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

と定める。

(1)

$g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ について整理すると

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= f\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\ &= f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

となり, $g(x) = g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ が成り立つ。

(証明終)

(2)

$t = \frac{\pi}{2} - x$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = -1$ であり, 積分区間について,

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	0

となるから, (1) より

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \cos^2 x dx \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin^2 t dt \\ &= I_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx$ の値は,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{x - \frac{\pi}{4}} + e^{\frac{\pi}{4} - x} \right) dx \\ &= \left[e^{x - \frac{\pi}{4}} - e^{\frac{\pi}{4} - x} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}} \right) - \left(e^{-\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{\pi}{4}} \right) \\ &= 2 \left(e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}} \right) \end{aligned}$$

である。また, (2) の結果より

$$I_1 = I_2$$

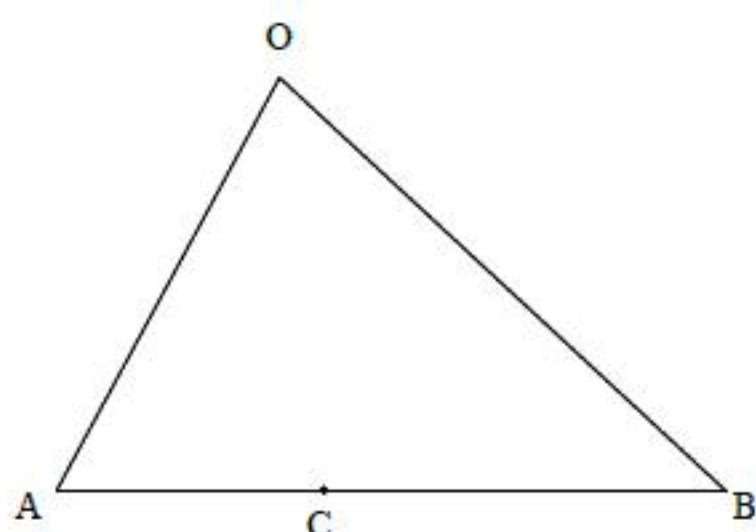
であり, さらに

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \sin^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) (\cos^2 x + \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx \\ &= 2 \left(e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}} \right) \end{aligned}$$

が成り立つため, $I_1 = I_2 = e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}}$ である。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = 2 \left(e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}} \right)$$

$$I_1 = e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}}$$



(1)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}|^2 &= |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AC}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2 \end{aligned}$$

となり、与式を得る。

(証明終)

(2)

$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= k\overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} &= k(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \\ \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{BC} &= \vec{0} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。与式の左辺を変形すると

$$\begin{aligned} &(1-k)|\overrightarrow{OA}|^2 + k|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= (1-k)\left(|\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2\right) + k\left(|\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{BC}|^2\right) (\because \textcircled{1}) \\ &= |\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \{(1-k)\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{BC}\} + (1-k)|\overrightarrow{AC}|^2 + k|\overrightarrow{BC}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OC}|^2 + (1-k)|\overrightarrow{AC}|^2 + k|\overrightarrow{BC}|^2 \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

となり、右辺に一致する。

(証明終)

(3)

点 D は等式

$$(1-k)|\overrightarrow{OA}|^2 + k|\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OD}|^2 + (1-k)|\overrightarrow{AD}|^2 + k|\overrightarrow{BD}|^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たすとする。(2)と同様に考えると、

$$\begin{aligned} &(1-k)|\overrightarrow{OA}|^2 + k|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= (1-k)\left(|\overrightarrow{OD}|^2 - 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AD} + |\overrightarrow{AD}|^2\right) + k\left(|\overrightarrow{OD}|^2 - 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BD} + |\overrightarrow{BD}|^2\right) \\ &= |\overrightarrow{OD}|^2 - 2\overrightarrow{OD} \cdot \{(1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BD}\} + (1-k)|\overrightarrow{AD}|^2 + k|\overrightarrow{BD}|^2 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、②、③より、

$$\overrightarrow{OD} \cdot \{(1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BD}\} = 0$$

となる。この左辺について、①より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} \cdot \{(1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BD}\} &= \overrightarrow{OD} \cdot \{(1-k)(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + k(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})\} \\ &= \overrightarrow{OD} \cdot \{(1-k)\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\} \\ &= \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

が成り立つから、

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

を得る。

(答) 0