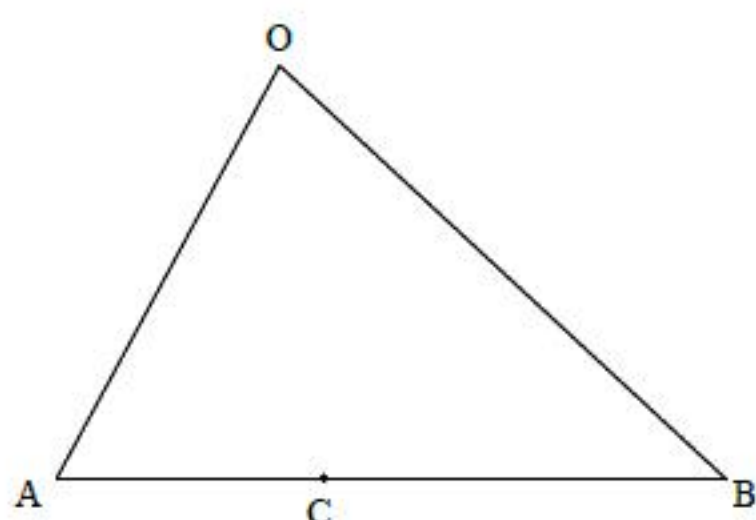




(1)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}|^2 &= |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AC}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2 \end{aligned}$$

となり、与式を得る。

(証明終)

(2)

$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= k\overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} &= k(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \\ \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{BC} &= \vec{0} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。与式の左辺を変形すると

$$\begin{aligned} &(1-k)|\overrightarrow{OA}|^2 + k|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= (1-k)(|\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2) + k(|\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{BC}|^2) \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= |\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \{(1-k)\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{BC}\} + (1-k)|\overrightarrow{AC}|^2 + k|\overrightarrow{BC}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OC}|^2 + (1-k)|\overrightarrow{AC}|^2 + k|\overrightarrow{BC}|^2 \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

となり、右辺に一致する。

(証明終)

(3)

点 D は等式

$$(1-k)|\overrightarrow{OA}|^2 + k|\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OD}|^2 + (1-k)|\overrightarrow{AD}|^2 + k|\overrightarrow{BD}|^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たすとする。(2)と同様に考えると、

$$\begin{aligned} &(1-k)|\overrightarrow{OA}|^2 + k|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= (1-k)(|\overrightarrow{OD}|^2 - 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AD} + |\overrightarrow{AD}|^2) + k(|\overrightarrow{OD}|^2 - 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BD} + |\overrightarrow{BD}|^2) \\ &= |\overrightarrow{OD}|^2 - 2\overrightarrow{OD} \cdot \{(1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BD}\} + (1-k)|\overrightarrow{AD}|^2 + k|\overrightarrow{BD}|^2 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、②、③より、

$$\overrightarrow{OD} \cdot \{(1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BD}\} = 0$$

となる。この左辺について、①より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} \cdot \{(1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BD}\} &= \overrightarrow{OD} \cdot \{(1-k)(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + k(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})\} \\ &= \overrightarrow{OD} \cdot \{(1-k)\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\} \\ &= \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

が成り立つから、

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

を得る。

(答) 0

(1)

$|z| = \sqrt{2}$ であるから $z - i \neq 0$ である。また

$$z - 1 \neq z - i$$

より $w \neq 1$ として考えてよい。この下で、

$$w = \frac{z-1}{z-i}$$

$$\Leftrightarrow w(z-i) = z-1$$

$$\Leftrightarrow (w-1)z = iw-1$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{iw-1}{w-1}$$

となる。 $|z| = \sqrt{2}$ より、

$$\left| \frac{iw-1}{w-1} \right| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |iw-1|^2 = 2|w-1|^2$$

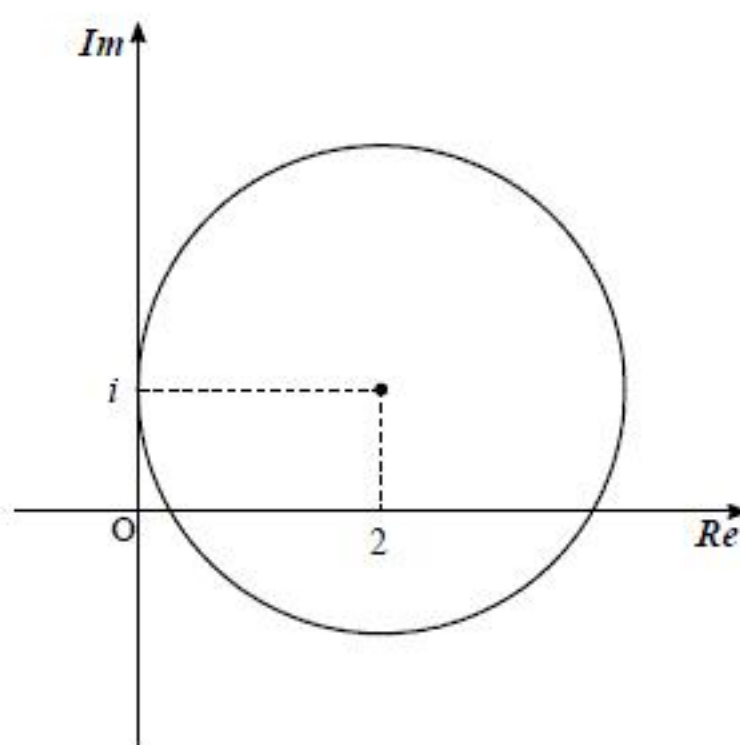
$$\Leftrightarrow w\bar{w} - iw + i\bar{w} + 1 = 2(w\bar{w} - w - \bar{w} + 1)$$

$$\Leftrightarrow w\bar{w} - (2-i)w - (2+i)\bar{w} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow |w - (2+i)|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow |w - (2+i)| = 2$$

である。よって、点 w は点 $2+i$ を中心とする半径 2 の円上を動く。これを図示すると以下のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)の円の中心 $2+i$ を、原点を中心に $\frac{\pi}{6}$ 回転させると、

$$\begin{aligned} (2+i)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) &= (2+i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i \end{aligned}$$

より、点 $\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ に移る。よって求める図形は

点 $\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ を中心とする半径 2 の円

とわかる。

(答) 点 $\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ を中心とする半径 2 の円

数列 $\{a_n\}, \{S_n\}$ について、関係式

$$a_1 = 2, a_n = n^2 - 2S_n + C \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立している。

(1)

$S_1 = a_1$ に注意すると、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^2 - 2S_1 + C \\ \Leftrightarrow C &= 2 - 1 + 2 \cdot 2 \\ \therefore C &= 5 \end{aligned}$$

である。

(答) $C = 5$

(2)

(1)の結果と $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1)^2 - 2S_{n+1} + 5 \\ a_n &= n^2 - 2S_n + 5 \end{aligned}$$

である。辺々引くと、

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 1 - 2a_{n+1}$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2n + 1) \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。

(答) $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2n + 1)$

(3)

$b_n = a_n - n + 1 \Leftrightarrow a_n = b_n + n - 1$ を $\textcircled{2}$ へ代入すると

$$\begin{aligned} b_{n+1} + n &= \frac{1}{3}(b_n + 3n) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= \frac{1}{3}b_n \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

であるから、数列 $\{b_n\}$ は、初項 2、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である。よって、

$$b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。

(答) $b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(4)

$\textcircled{3}$ より、 $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + n - 1$ であるから、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + k - 1 \right\} \\ &= 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{2}n(n+1) - n \\ &= 3 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\ &= -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 3 \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $S_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 3$

m を正の整数とすると、関数

$$f(x) = \int_0^x (mt^{2m-1} - t^{2m+1})e^{-t^2} dt$$

の極値を求める。 $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (mx^{2m-1} - x^{2m+1})e^{-x^2} \\ &= x^{2m-1}(\sqrt{m} - x)(\sqrt{m} + x)e^{-x^2} \end{aligned}$$

であるから、 $e^{-x^2} > 0$ 、 $m \geq 1$ をふまえると、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\sqrt{m}$	...	0	...	$\sqrt{m}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

したがって、 $x=0$ で極小値を、 $x=\pm\sqrt{m}$ で極大値をとる。以下、 $\int_0^x (mt^{2m-1} - t^{2m+1})e^{-t^2} dt$ を具体的に計算する。 $u=t^2$ とすると、 $du=2tdt$ であり、積分区間について、

$$\begin{array}{c|ccc} t & 0 & \rightarrow & x \\ \hline u & 0 & \rightarrow & x^2 \end{array}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (mt^{2m-1} - t^{2m+1})e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^{x^2} \left(\frac{m}{t} u^m - tu^m \right) e^{-u} \cdot \frac{1}{2t} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{x^2} (mu^{m-1} - u^m) e^{-u} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{x^2} (u^m e^{-u})' du \\ &= \frac{1}{2} [u^m e^{-u}]_0^{x^2} \\ &= \frac{1}{2} x^{2m} e^{-x^2} \end{aligned}$$

を得る。よって、

$$f(0) = 0$$

$$f(\pm\sqrt{m}) = \frac{1}{2} m^m e^{-m}$$

となる。したがって、 $f(x)$ は $x=\pm\sqrt{m}$ のとき極大値 $\frac{1}{2} m^m e^{-m}$ 、 $x=0$ のとき極小値 0 をとる。

(答) $x=\pm\sqrt{m}$ のとき極大値 $\frac{1}{2} m^m e^{-m}$ 、 $x=0$ のとき極小値 0