

2017年度

M 3

数 学

2月25日(土) 理 学 部 (数学科)
【前 期 日 程】

9 : 30 ~ 11 : 30

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れてはいけません。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4枚)に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出なさい。
- 4 解答は、すべて解答用紙に記入しなさい。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記しなさい。
- 6 問題は、声を出して読むはいけません。
- 7 各問の配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰りなさい。

- 1** 平面上に三角形 OAB がある。実数 k に対して、直線 AB 上の点 C を $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ を満たす点とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 等式

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2$$

が成り立つことを示せ。

(2) 等式

$$(1-k)|\overrightarrow{OA}|^2 + k|\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 + (1-k)|\overrightarrow{AC}|^2 + k|\overrightarrow{BC}|^2$$

が成り立つことを示せ。

(3) 平面上の点 D が等式

$$(1-k)|\overrightarrow{OA}|^2 + k|\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OD}|^2 + (1-k)|\overrightarrow{AD}|^2 + k|\overrightarrow{BD}|^2$$

を満たすとき、 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CD}$ の値を求めよ。

(配点 25 %)

2 複素数平面上の点 z が原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上を動くとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 複素数 $w = \frac{z-1}{z-i}$ で表される点 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。ただし、 i は虚数単位である。

(2) (1) の図形を、原点を中心に $\frac{\pi}{6}$ だけ回転して得られる図形を求めよ。

(配点 25 %)

3 $\{a_n\}$ を数列とし、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。 C を定数とする。数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{S_n\}$ が関係式

$$a_1 = 2, \quad a_n = n^2 - 2S_n + C \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たしているとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) C の値を求めよ。

(2) a_{n+1} を、 a_n と n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_n - n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 数列 $\{S_n\}$ の一般項を求めよ。

(配点 25 %)

4 m を正の整数とする。関数

$$f(x) = \int_0^x (m t^{2m-1} - t^{2m+1}) e^{-t^2} dt$$

の極値を求めよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(配点 25 %)