

(1)

$$(x+y+z)^2 = (x^2+y^2+z^2) + 2(xy+yz+zx)$$

が成り立つ。これに $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=a$ を代入すれば,

$$0^2 = a + 2(xy+yz+zx)$$

$$\therefore xy+yz+zx = -\frac{a}{2}$$

となる。

$$(答) \quad xy+yz+zx = -\frac{a}{2}$$

(2)

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = x^3+y^3+z^3-3xyz$$

が成り立つ。これに $x+y+z=0$, $x^3+y^3+z^3=3$ を代入すれば,

$$0 = 3 - 3xyz$$

$$\therefore xyz = 1$$

となる。

$$(答) \quad xyz = 1$$

(3)

$x+y+z=0$ および(1), (2)の結果より, 解と係数の関係から, x, y, z は3次方程式

$$X^3 - \frac{a}{2}X - 1 = 0$$

の3解である。よって,

$$\begin{cases} x^3 - \frac{a}{2}x - 1 = 0 \\ y^3 - \frac{a}{2}y - 1 = 0 \\ z^3 - \frac{a}{2}z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \frac{a}{2}x + 1 \\ y^3 = \frac{a}{2}y + 1 \\ z^3 = \frac{a}{2}z + 1 \end{cases}$$

が成り立つ。したがって,

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 + z^5 &= x^2 \left(\frac{a}{2}x + 1 \right) + y^2 \left(\frac{a}{2}y + 1 \right) + z^2 \left(\frac{a}{2}z + 1 \right) \\ &\Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 = \frac{a}{2}(x^3 + y^3 + z^3) + (x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

となる。これに $x^5+y^5+z^5=15$, $x^3+y^3+z^3=3$, $x^2+y^2+z^2=a$ を代入して,

$$\begin{aligned} 15 &= \frac{a}{2} \cdot 3 + a \\ \therefore a &= 6 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad a = 6$$

(1)

①と曲線 C の方程式を連立し、 y を消去すると、

$$2x^2 + ax + b = -x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + ax + b - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が得られる。①のグラフが曲線 C と共有点を2点持つことは、②が $0 \leq x \leq 1$ の範囲に異なる2つの実数解を持つことと同値である。ここで、

$$f(x) = 3x^2 + ax + b - 1$$

と定義すると、

$$f(x) = 3\left(x + \frac{a}{6}\right)^2 + b - 1 - \frac{a^2}{12}$$

となるから、 $y = f(x)$ のグラフは、軸が $x = -\frac{a}{6}$ 、頂点が $\left(-\frac{a}{6}, b - 1 - \frac{a^2}{12}\right)$ であるような下に凸

の放物線となる。よって、②が $0 \leq x \leq 1$ の範囲に異なる2つの実数解を持つ条件は、

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - 1 - \frac{a^2}{12} < 0 \\ 0 < -\frac{a}{6} < 1 \\ f(0) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b < \frac{a^2}{12} + 1 \\ -6 < a < 0 \\ b - 1 \geq 0 \\ a + b + 2 \geq 0 \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b < \frac{a^2}{12} + 1 \quad \text{かつ} \quad -6 < a < 0 \quad \text{かつ} \quad b - 1 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad a + b + 2 \geq 0$$

(2)

①のグラフの頂点を (X, Y) とすると、

$$2x^2 + ax + b = 2\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 + b - \frac{a^2}{8}$$

より、

$$\begin{cases} X = -\frac{a}{4} \\ Y = b - \frac{a^2}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4X \\ b = Y + 2X^2 \end{cases}$$

となる。よって、(1)の結果より、

$$\begin{cases} b < \frac{a^2}{12} + 1 \\ -6 < a < 0 \\ b - 1 \geq 0 \\ a + b + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y + 2X^2 < \frac{(-4X)^2}{12} + 1 \\ -6 < -4X < 0 \\ Y + 2X^2 - 1 \geq 0 \\ -4X + Y + 2X^2 + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y < -\frac{2}{3}X^2 + 1 \\ 0 < X < \frac{3}{2} \\ Y \geq -2X^2 + 1 \\ Y \geq -2(X-1)^2 \end{cases}$$

となる。したがって、①のグラフの頂点のとり得る範囲は、

$$y < -\frac{2}{3}x^2 + 1 \quad \text{かつ} \quad 0 < x < \frac{3}{2} \quad \text{かつ} \quad y \geq -2x^2 + 1 \quad \text{かつ} \quad y \geq -2(x-1)^2$$

を満たす領域である。ここで、 $y = -2x^2 + 1$ と $y = -2(x-1)^2$ の共有点の x 座標は、

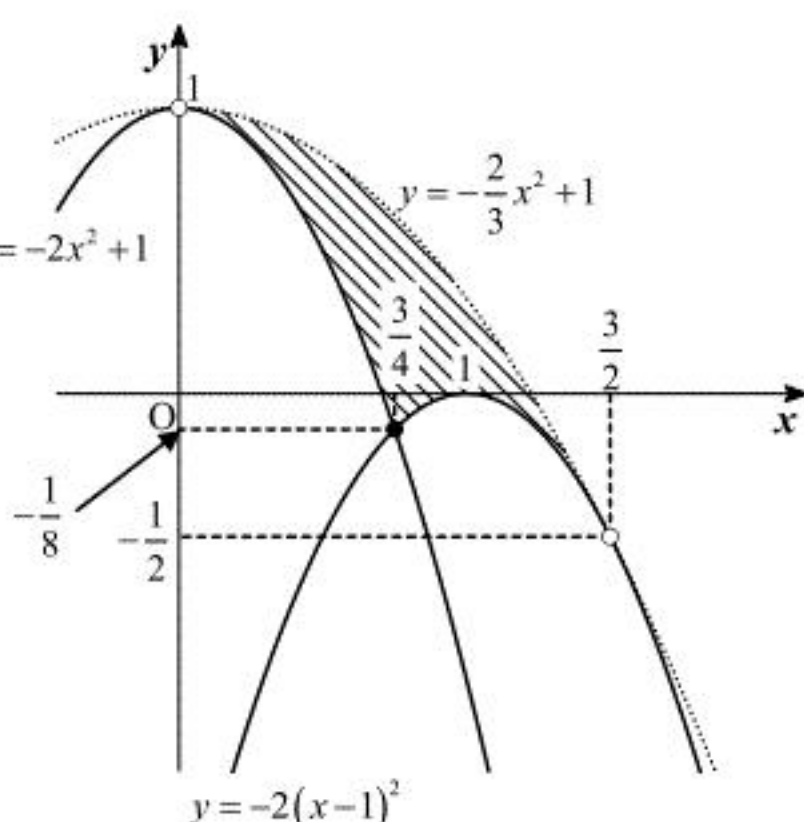
$$\begin{aligned} -2x^2 + 1 &= -2(x-1)^2 \\ \Leftrightarrow 0 &= 4x - 3 \\ \therefore x &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

であり、 $y = -\frac{2}{3}x^2 + 1$ と $y = -2(x-1)^2$ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}x^2 + 1 &= -2(x-1)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

であることに注意して、これを図示すると下の図の斜線部分になる。ただし、境界は放物線

$y = -\frac{2}{3}x^2 + 1$ の部分は含まず、それ以外の部分はすべて含む。



(答) 前図

(3)

求める面積は、(2)で求めた図の斜線部分の面積となるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{3}{4}} \left\{ \left(-\frac{2}{3}x^2 + 1 \right) - \left(-2x^2 + 1 \right) \right\} dx + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} \left\{ \left(-\frac{2}{3}x^2 + 1 \right) + 2(x-1)^2 \right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{4}{3}x^2 dx + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} \frac{4}{3} \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 dx \\ &= \left[\frac{4}{9}x^3 \right]_0^{\frac{3}{4}} + \left[\frac{4}{9} \left(x - \frac{3}{2} \right)^3 \right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{3}{16} - 0 \right) + \left\{ 0 - \left(-\frac{3}{16} \right) \right\} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{3}{8}$$

(1)

第 n 群の項の分母は $2n+1$ であり、分子は順に、 $n^2, (n-1)^2, \dots, 2^2, 1^2$ となる。よって、第 n 群

の最初の項は $\frac{n^2}{2n+1}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{n^2}{2n+1}$$

(2)

$23 = 2 \cdot 11 + 1$ より、 $\frac{36}{23}$ は第 11 群の項である。第 11 群は順に、

$$\frac{121}{23}, \frac{100}{23}, \frac{81}{23}, \frac{64}{23}, \frac{49}{23}, \frac{36}{23}, \dots, \frac{1}{23}$$

となるから、 $\frac{36}{23}$ は第 11 群の 6 番目の項である。また、第 n 群は n 個の項を持つから、第 1 群から

第 10 群の持つ項の個数の総和は、

$$\sum_{n=1}^{10} n = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

となる。したがって、 $55 + 6 = 61$ より、 $\frac{36}{23}$ は第 61 項である。

(答) 第 61 項

(3)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n^2}{2n+1} + \frac{(n-1)^2}{2n+1} + \dots + \frac{1^2}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum_{m=1}^n m^2 \\ &= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n S_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{18} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{n(n+1)(n+2)}{18}$$

(1)

背理法によって $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないことを示す。すなわち、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行であると仮定して矛盾を導く。 $p, q > 0$ より、 $\vec{a}, \vec{b}$ の大きさはいずれも正であるから、 $\vec{a}, \vec{b}$ はいずれも $\vec{0}$ ではない。

よって、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行であるとき、実数 k ($k \neq 0$) を用いて $\vec{b} = k\vec{a}$ とおける。すると $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$ となるから、

$$\sqrt{q} = |k|\sqrt{p} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。一方、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = k\vec{a} \cdot \vec{c}$ も成り立つから、

$$q = kp \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①、②と $p \neq 0, q \neq 0, k \neq 0$ より、

$$\frac{q}{\sqrt{q}} = \frac{kp}{|k|\sqrt{p}}$$

$$\therefore \sqrt{q} = \sqrt{p} \text{ あるいは } \sqrt{q} = -\sqrt{p}$$

を得る。 $\sqrt{q} = -\sqrt{p}$ は左辺が正であり右辺が負であるので、このようになることはあり得ない。したがって $\sqrt{q} = \sqrt{p}$ より $p = q$ となるが、これは $p \neq q$ に矛盾する。よって、題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果と $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ より、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立である。よって、実数 s, t を用いて、

$$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

と表せる。 $|\vec{c}| = \sqrt{p+q}$ より、

$$|\vec{c}|^2 = p+q$$

$$\Leftrightarrow \vec{c} \cdot (s\vec{a} + t\vec{b}) = p+q$$

$$\Leftrightarrow sp + tq = p+q \quad \dots \textcircled{3}$$

である。また、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = p$ より、

$$s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} = p$$

$$\Leftrightarrow sp + t\vec{a} \cdot \vec{b} = p \quad \dots \textcircled{4}$$

である。さらに、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = q$ より、

$$s\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = q$$

$$\Leftrightarrow s\vec{a} \cdot \vec{b} + tq = q \quad \dots \textcircled{5}$$

である。④+⑤-③より、

$$(s+t)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

となる。よって、 $s+t=0$ または $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ となる。

[1] $s+t=0$ のとき

$t = -s$ であるから、③に代入して、

$$sp - sq = p+q$$

$$\therefore s = \frac{p+q}{p-q}, t = -\frac{p+q}{p-q} \quad (\because p \neq q)$$

となる。このとき、④より、

$$\frac{p+q}{p-q}p - \frac{p+q}{p-q}\vec{a} \cdot \vec{b} = p$$

$$\Leftrightarrow \frac{p+q}{p-q}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{2pq}{p-q}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{2pq}{p+q} \quad (\because p+q > 0)$$

となる。これら $s, t, \vec{a} \cdot \vec{b}$ の値は確かに③、④、⑤の3式を満たす。相加平均と相乗平均に関する不等式より、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{2pq}{p+q} = \frac{\sqrt{pq}}{\frac{p+q}{2}} \sqrt{pq} \leq \sqrt{pq} = |\vec{a}||\vec{b}|$$

は成り立っているから、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{2pq}{p+q}, |\vec{a}| = \sqrt{p}, |\vec{b}| = \sqrt{q}$ を満たすような $\vec{a}, \vec{b}$ は存在する。

以上より、このとき確かに条件を満たす。

[2] $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ のとき

④より、

$$sp = p$$

$$\therefore s = 1 \quad (\because p > 0)$$

となる。同様に、⑤より、

$$tq = q$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because q > 0)$$

となる。これら s, t の値は③も満たす。よって、このとき条件を確かに満たす。

以上[1], [2]より、 $\vec{c} = \frac{p+q}{p-q}\vec{a} - \frac{p+q}{p-q}\vec{b}$ または $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \vec{c} = \frac{p+q}{p-q}\vec{a} - \frac{p+q}{p-q}\vec{b} \quad \text{または} \quad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$