

(1)

$w = \frac{z+1}{1-z}$ のとき, $w = -1 + \frac{2}{1-z}$ である。 $\frac{2}{1-z} = 0$ を満たす z は存在しないから, $w \neq -1$ である。

よって,

$$\begin{aligned} w &= \frac{z+1}{1-z} \\ \Rightarrow w(1-z) &= z+1 \\ \Leftrightarrow (w+1)z &= w-1 \\ \Leftrightarrow z &= \frac{w-1}{w+1} \quad (\because w \neq -1) \end{aligned}$$

である。逆に, $z = \frac{w-1}{w+1}$ が成り立つとき, $z = 1 - \frac{2}{w+1}$ である。 $\frac{2}{w+1} = 0$ を満たす w は存在しないから, $z \neq 1$ である。よって,

$$\begin{aligned} z &= \frac{w-1}{w+1} \\ \Rightarrow (w+1)z &= w-1 \\ \Leftrightarrow w(1-z) &= z+1 \\ \Leftrightarrow w &= \frac{z+1}{1-z} \quad (\because z \neq 1) \end{aligned}$$

である。以上のことから,

$$\begin{cases} z \neq 1 \\ w = \frac{z+1}{1-z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w \neq -1 \\ z = \frac{w-1}{w+1} \end{cases}$$

となる。これと,

$$\text{点 } z \text{ が複素数平面の虚軸上にある} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$$

より,

w が求める図形上にある

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ w = \frac{z+1}{1-z} \\ z + \bar{z} = 0 \end{cases} \text{ を満たす } z \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w \neq -1 \\ z = \frac{w-1}{w+1} \\ z + \bar{z} = 0 \end{cases} \text{ を満たす } z \text{ が存在する}$$

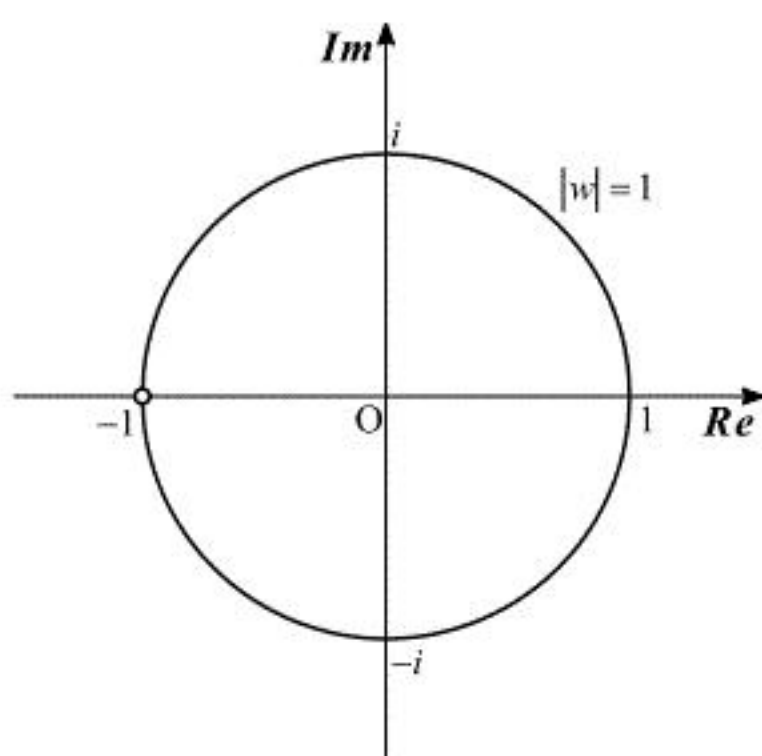
$$\Leftrightarrow \begin{cases} w \neq -1 \\ \frac{w-1}{w+1} + \overline{\left(\frac{w-1}{w+1}\right)} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w \neq -1 \\ (w-1)(\bar{w}+1) + (w+1)(\bar{w}-1) = 0 \quad (\because w+1 \neq 0, \bar{w}+1 \neq 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w \neq -1 \\ 2w\bar{w} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w \neq -1 \\ |w| = 1 \end{cases}$$

となるから, これは原点を中心とする半径1の円から点 $w = -1$ を除いたものになる。よって, これを図示すると下の図のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)より, w は, $-\pi < \theta < \pi$ を満たす θ を用いて $w = \cos \theta + i \sin \theta$ と表せる。よって,

$$\begin{aligned} |w+1+i| &= |\cos \theta + 1 + i(\sin \theta + 1)| \\ &= \sqrt{(\cos \theta + 1)^2 + (\sin \theta + 1)^2} \\ &= \sqrt{3 + 2\cos \theta + 2\sin \theta} \quad (\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1) \\ &= \sqrt{3 + 2\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

となる。 $-1 \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ より, $|w+1+i|$ は, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, 最大値

$$\begin{aligned} |w+1+i| &= \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

をとり, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -1$, すなわち $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ のとき, 最小値

$$\begin{aligned} |w+1+i| &= \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

をとる。

(答) 最大値: $\sqrt{2} + 1$, 最小値: $\sqrt{2} - 1$

(1)

背理法によって $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないことを示す。すなわち、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行であると仮定して矛盾を導く。 $\vec{a}, \vec{b}$ の大きさはいずれも正であるから、 $\vec{a}, \vec{b}$ はいずれも $\vec{0}$ ではない。よって、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行であるとき、実数 k ($k \neq 0$) を用いて $\vec{b} = k\vec{a}$ とおける。すると $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$ となるから、

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= |k|\sqrt{3} \\ \therefore |k| &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。一方、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = k\vec{a} \cdot \vec{c}$ も成り立つから、

$$\begin{aligned}2 &= 3k \\ \therefore k &= \frac{2}{3} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \neq \frac{2}{3}$ かつ $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \neq \frac{2}{3}$ より、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ は矛盾している。よって、題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果と $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ より、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立である。よって、実数 s, t を用いて、

$$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

と表せる。 $|\vec{c}| = \sqrt{5}$ より、

$$\begin{aligned}|\vec{c}|^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow \vec{c} \cdot (s\vec{a} + t\vec{b}) &= 5 \\ \Leftrightarrow 3s + 2t &= 5 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

である。また、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3$ より、

$$\begin{aligned}s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 \\ \Leftrightarrow 3s + t\vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 \quad \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

である。さらに、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$ より、

$$\begin{aligned}s\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow s\vec{a} \cdot \vec{b} + 2t &= 2 \quad \dots \textcircled{5}\end{aligned}$$

である。 $\textcircled{4} + \textcircled{5} - \textcircled{3}$ より、

$$(s+t)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

となる。よって、 $s+t=0$ または $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ となる。

[1] $s+t=0$ のとき

$t = -s$ であるから、 $\textcircled{3}$ に代入して、

$$\begin{aligned}3s - 2s &= 5 \\ \therefore s &= 5, t = -5\end{aligned}$$

となる。このとき、 $\textcircled{4}$ より、

$$\begin{aligned}15 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{12}{5}\end{aligned}$$

となる。これら $s, t, \vec{a} \cdot \vec{b}$ の値は確かに $\textcircled{3}, \textcircled{4}, \textcircled{5}$ の3式を満たす。また、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{12}{5} \leq \sqrt{6} = |\vec{a}||\vec{b}|$$

は成り立っているから、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{12}{5}, |\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ を満たすような $\vec{a}, \vec{b}$ は存在する。以上

より、このとき確かに条件を満たす。

[2] $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ のとき

$\textcircled{4}$ より、

$$\begin{aligned}3s &= 3 \\ \therefore s &= 1\end{aligned}$$

となる。同様に、 $\textcircled{5}$ より、

$$\begin{aligned}2t &= 2 \\ \therefore t &= 1\end{aligned}$$

となる。これら s, t の値は $\textcircled{3}$ も満たす。よって、このとき条件を確かに満たす。

以上[1], [2]より、 $\vec{c} = 5\vec{a} - 5\vec{b}$ または $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ となる。

(答) $\vec{c} = 5\vec{a} - 5\vec{b}$ または $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

(1)

第 n 群の項の分母は $2n+1$ であり、分子は順に、 $n^2, (n-1)^2, \dots, 2^2, 1^2$ となる。よって、第 n 群

の最初の項は $\frac{n^2}{2n+1}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{n^2}{2n+1}$$

(2)

$23 = 2 \cdot 11 + 1$ より、 $\frac{36}{23}$ は第 11 群の項である。第 11 群は順に、

$$\frac{121}{23}, \frac{100}{23}, \frac{81}{23}, \frac{64}{23}, \frac{49}{23}, \frac{36}{23}, \dots, \frac{1}{23}$$

となるから、 $\frac{36}{23}$ は第 11 群の 6 番目の項である。また、第 n 群は n 個の項を持つから、第 1 群か

ら第 10 群の持つ項の個数の総和は、

$$\sum_{n=1}^{10} n = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

となる。したがって、 $55 + 6 = 61$ より、 $\frac{36}{23}$ は第 61 項である。

(答) 第 61 項

(3)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n^2}{2n+1} + \frac{(n-1)^2}{2n+1} + \dots + \frac{1^2}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum_{m=1}^n m^2 \\ &= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n S_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{18} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{n(n+1)(n+2)}{18}$$

(4)

第 1 群から第 27 群の持つ項の個数の総和は、

$$\sum_{n=1}^{27} n = \frac{27 \cdot 28}{2} = 378$$

より、378 個となる。よって、第 376 項は第 27 群の後ろから 3 番目の項である。第 27 群の持つ項は順に

$$\frac{27^2}{55}, \frac{26^2}{55}, \dots, \frac{2^2}{55}, \frac{1^2}{55}$$

となるから、全体の数列の第 377 項は $\frac{4}{55}$ であり、第 378 項は $\frac{1}{55}$ である。よって、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{27} S_k - \frac{4}{55} - \frac{1}{55} &= \frac{27 \cdot 28 \cdot 29}{18} - \frac{4}{55} - \frac{1}{55} \\ &= \frac{13397}{11} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{13397}{11}$$

(1)

三角関数の加法定理より,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \} \\ &= \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

となる。よって、題意は示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2x dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 4x}{8} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \left(\frac{1}{2}\pi + 0 \right) - \left(-\frac{1}{2}\pi + 0 \right) \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) π

(3)

(1)より,

$$(\cos tx)(\cos 2x) = \frac{1}{2} \{ \cos(t+2)x + \cos(t-2)x \}$$

であることに注意すると、 $|t| \neq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos tx)(\cos 2x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \{ \cos(t+2)x + \cos(t-2)x \} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(t+2)x}{t+2} + \frac{\sin(t-2)x}{t-2} \right]_{-\pi}^{\pi} \quad (\because |t| \neq 2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(t+2)\pi}{t+2} + \frac{\sin(t-2)\pi}{t-2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(-t-2)\pi}{t+2} + \frac{\sin(-t+2)\pi}{t-2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin t\pi}{t+2} + \frac{\sin t\pi}{t-2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{-\sin t\pi}{t+2} + \frac{-\sin t\pi}{t-2} \right) \\ &= \frac{\sin t\pi}{t+2} + \frac{\sin t\pi}{t-2} \\ &= \left(\frac{1}{t+2} + \frac{1}{t-2} \right) \sin t\pi \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \left(\frac{1}{t+2} + \frac{1}{t-2} \right) \sin t\pi$$

(4)

(3)の結果より,

$$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2} \left\{ \left(\frac{1}{t+2} + \frac{1}{t-2} \right) \sin t\pi \right\}$$

となる。ここで $y = t - 2$ とおくと、 $t \rightarrow 2$ のとき $y \rightarrow 0$ であり,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{\sin t\pi}{t+2} + \frac{\sin t\pi}{t-2} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(y+2)\pi}{y+4} + \frac{\sin(y+2)\pi}{y} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y\pi}{y+4} + \frac{\sin y\pi}{y\pi} \cdot \pi \right) \\ &= \frac{0}{4} + 1 \cdot \pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) π