

1

(1)

第 n 群の項の分母は $2n+1$ であり、分子は順に、 $n^2, (n-1)^2, \dots, 2^2, 1^2$ となる。よって、第 n 群

の最初の項は $\frac{n^2}{2n+1}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{n^2}{2n+1}$$

(2)

$23 = 2 \cdot 11 + 1$ より、 $\frac{36}{23}$ は第 11 群の項である。第 11 群は順に、

$$\frac{121}{23}, \frac{100}{23}, \frac{81}{23}, \frac{64}{23}, \frac{49}{23}, \frac{36}{23}, \dots, \frac{1}{23}$$

となるから、 $\frac{36}{23}$ は第 11 群の 6 番目の項である。また、第 n 群は n 個の項を持つから、第 1 群か

ら第 10 群の持つ項の個数の総和は、

$$\sum_{n=1}^{10} n = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

となる。したがって、 $55 + 6 = 61$ より、 $\frac{36}{23}$ は第 61 項である。

(答) 第 61 項

(3)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n^2}{2n+1} + \frac{(n-1)^2}{2n+1} + \dots + \frac{1^2}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum_{m=1}^n m^2 \\ &= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n S_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{18} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{n(n+1)(n+2)}{18}$$

(4)

第 1 群から第 27 群の持つ項の個数の総和は、

$$\sum_{n=1}^{27} n = \frac{27 \cdot 28}{2} = 378$$

より、378 個となる。よって、第 376 項は第 27 群の後ろから 3 番目の項である。第 27 群の持つ項は順に

$$\frac{27^2}{55}, \frac{26^2}{55}, \dots, \frac{2^2}{55}, \frac{1^2}{55}$$

となるから、全体の数列の第 377 項は $\frac{4}{55}$ であり、第 378 項は $\frac{1}{55}$ である。よって、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{27} S_k - \frac{4}{55} - \frac{1}{55} &= \frac{27 \cdot 28 \cdot 29}{18} - \frac{4}{55} - \frac{1}{55} \\ &= \frac{13397}{11} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{13397}{11}$$

(1)

背理法によって $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないことを示す。すなわち、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行であると仮定して矛盾を導く。 $p, q > 0$ より、 $\vec{a}, \vec{b}$ の大きさはいずれも正であるから、 $\vec{a}, \vec{b}$ はいずれも $\vec{0}$ ではない。

よって、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行であるとき、実数 k ($k \neq 0$) を用いて $\vec{b} = k\vec{a}$ とおける。すると $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$ と

なるから、

$$\sqrt{q} = |k|\sqrt{p} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。一方、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = k\vec{a} \cdot \vec{c}$ も成り立つから、

$$q = kp \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①、②と $p \neq 0, q \neq 0, k \neq 0$ より、

$$\frac{q}{\sqrt{q}} = \frac{kp}{|k|\sqrt{p}}$$

$$\therefore \sqrt{q} = \sqrt{p} \text{ あるいは } \sqrt{q} = -\sqrt{p}$$

を得る。 $\sqrt{q} = -\sqrt{p}$ は左辺が正であり右辺が負であるので、このようになることはあり得ない。したがって $\sqrt{q} = \sqrt{p}$ より $p = q$ となるが、これは $p \neq q$ に矛盾する。よって、題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果と $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ より、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立である。よって、実数 s, t を用いて、

$$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

と表せる。 $|\vec{c}| = \sqrt{p+q}$ より、

$$|\vec{c}|^2 = p+q$$

$$\Leftrightarrow \vec{c} \cdot (s\vec{a} + t\vec{b}) = p+q$$

$$\Leftrightarrow sp + tq = p+q \quad \dots \textcircled{3}$$

である。また、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = p$ より、

$$s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} = p$$

$$\Leftrightarrow sp + t\vec{a} \cdot \vec{b} = p \quad \dots \textcircled{4}$$

である。さらに、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = q$ より、

$$s\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = q$$

$$\Leftrightarrow s\vec{a} \cdot \vec{b} + tq = q \quad \dots \textcircled{5}$$

である。④+⑤-③より、

$$(s+t)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

となる。よって、 $s+t=0$ または $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ となる。

[1] $s+t=0$ のとき

$t = -s$ であるから、③に代入して、

$$sp - sq = p+q$$

$$\therefore s = \frac{p+q}{p-q}, t = -\frac{p+q}{p-q} \quad (\because p \neq q)$$

となる。このとき、④より、

$$\frac{p+q}{p-q}p - \frac{p+q}{p-q}\vec{a} \cdot \vec{b} = p$$

$$\Leftrightarrow \frac{p+q}{p-q}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{2pq}{p-q}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{2pq}{p+q} \quad (\because p+q > 0)$$

となる。これら $s, t, \vec{a} \cdot \vec{b}$ の値は確かに③、④、⑤の3式を満たす。相加平均と相乗平均に関する不等式より、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{2pq}{p+q} = \frac{\sqrt{pq}}{\frac{p+q}{2}} \sqrt{pq} \leq \sqrt{pq} = |\vec{a}||\vec{b}|$$

は成り立っているから、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{2pq}{p+q}, |\vec{a}| = \sqrt{p}, |\vec{b}| = \sqrt{q}$ を満たすような $\vec{a}, \vec{b}$ は存在する。

以上より、このとき確かに条件を満たす。

[2] $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ のとき

④より、

$$sp = p$$

$$\therefore s = 1 \quad (\because p > 0)$$

となる。同様に、⑤より、

$$tq = q$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because q > 0)$$

となる。これら s, t の値は③も満たす。よって、このとき条件を確かに満たす。

以上[1], [2]より、 $\vec{c} = \frac{p+q}{p-q}\vec{a} - \frac{p+q}{p-q}\vec{b}$ または $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \vec{c} = \frac{p+q}{p-q}\vec{a} - \frac{p+q}{p-q}\vec{b} \quad \text{または} \quad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

3

(1)

①と曲線 C の方程式を連立し、 y を消去すると、

$$2x^2 + ax + b = -x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + ax + b - 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が得られる。①のグラフが曲線 C と共有点を2点持つことは、②が $0 \leq x \leq 1$ の範囲に異なる2つの実数解を持つことと同値である。ここで、

$$f(x) = 3x^2 + ax + b - 1$$

と定義すると、

$$f(x) = 3\left(x + \frac{a}{6}\right)^2 + b - 1 - \frac{a^2}{12}$$

となるから、 $y = f(x)$ のグラフは、軸が $x = -\frac{a}{6}$ 、頂点が $\left(-\frac{a}{6}, b - 1 - \frac{a^2}{12}\right)$ であるような下に凸

の放物線となる。よって、②が $0 \leq x \leq 1$ の範囲に異なる2つの実数解を持つ条件は、

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - 1 - \frac{a^2}{12} < 0 \\ 0 < -\frac{a}{6} < 1 \\ f(0) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b < \frac{a^2}{12} + 1 \\ -6 < a < 0 \\ b - 1 \geq 0 \\ a + b + 2 \geq 0 \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b < \frac{a^2}{12} + 1 \quad \text{かつ} \quad -6 < a < 0 \quad \text{かつ} \quad b - 1 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad a + b + 2 \geq 0$$

(2)

①のグラフの頂点を (X, Y) とすると、

$$2x^2 + ax + b = 2\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 + b - \frac{a^2}{8}$$

より、

$$\begin{cases} X = -\frac{a}{4} \\ Y = b - \frac{a^2}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4X \\ b = Y + 2X^2 \end{cases}$$

となる。よって、(1)の結果より、

$$\begin{cases} b < \frac{a^2}{12} + 1 \\ -6 < a < 0 \\ b - 1 \geq 0 \\ a + b + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y + 2X^2 < \frac{(-4X)^2}{12} + 1 \\ -6 < -4X < 0 \\ Y + 2X^2 - 1 \geq 0 \\ -4X + Y + 2X^2 + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y < -\frac{2}{3}X^2 + 1 \\ 0 < X < \frac{3}{2} \\ Y \geq -2X^2 + 1 \\ Y \geq -2(X-1)^2 \end{cases}$$

となる。したがって、①のグラフの頂点のとり得る範囲は、

$$y < -\frac{2}{3}x^2 + 1 \quad \text{かつ} \quad 0 < x < \frac{3}{2} \quad \text{かつ} \quad y \geq -2x^2 + 1 \quad \text{かつ} \quad y \geq -2(x-1)^2$$

を満たす領域である。ここで、 $y = -2x^2 + 1$ と $y = -2(x-1)^2$ の共有点の x 座標は、

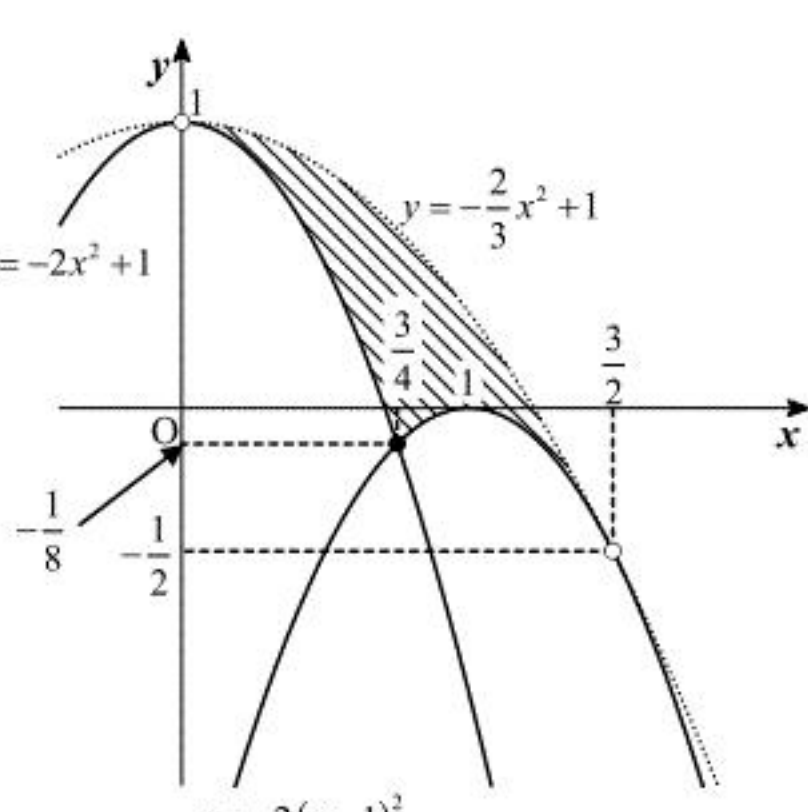
$$\begin{aligned} -2x^2 + 1 &= -2(x-1)^2 \\ \Leftrightarrow 0 &= 4x - 3 \\ \therefore x &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

であり、 $y = -\frac{2}{3}x^2 + 1$ と $y = -2(x-1)^2$ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}x^2 + 1 &= -2(x-1)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

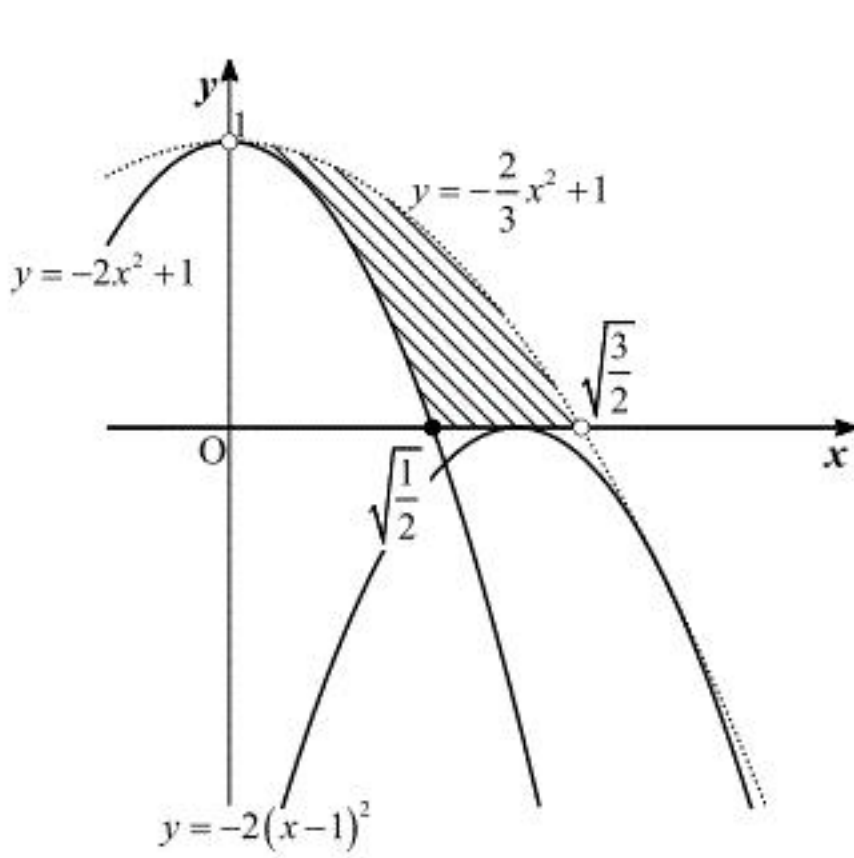
であることに注意して、これを図示すると下の図の斜線部分になる。ただし、境界は放物線

$y = -\frac{2}{3}x^2 + 1$ の部分は含まず、それ以外の部分はすべて含む。



(答) 前図

(3)



$$-\frac{2}{3}x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$-2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

となることに注意すると、(2)の結果より、 x 軸のまわりに1回転させる領域は上図の斜線部分

である。よって、求める体積は、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \pi \left\{ \left(-\frac{2}{3}x^2 + 1 \right)^2 - \left(-2x^2 + 1 \right)^2 \right\} dx + \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \pi \left(-\frac{2}{3}x^2 + 1 \right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left(-\frac{2}{3}x^2 + 1 \right)^2 dx - \pi \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left(-2x^2 + 1 \right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left(\frac{4}{9}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + 1 \right) dx - \pi \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left(4x^4 - 4x^2 + 1 \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{4}{45}x^5 - \frac{4}{9}x^3 + x \right]_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} - \pi \left[\frac{4}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + x \right]_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= \pi \left(\frac{4}{15}\sqrt{6} - 0 \right) - \pi \left(\frac{4}{15}\sqrt{2} - 0 \right) \\ &= \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{15} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{15} \pi$$

(1)

$$f_2(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$$

であるから、

$$f_2'(x) = e^x - 1 - x$$

$$f_2''(x) = e^x - 1$$

となる。 $x \geq 0$ の範囲で、

$$f_2''(x) = e^x - 1 \geq e^0 - 1 = 0$$

が成り立つから、 $x \geq 0$ の範囲で $f_2'(x)$ は広義単調増加である。よって、

$$f_2'(x) \geq f_2'(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$$

となり、 $x \geq 0$ の範囲で $f_2(x)$ も広義単調増加である。したがって、

$$f_2(x) \geq f_2(0) = e^0 - 1 - 0 - \frac{0^2}{2} = 0$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(2)

数学的帰納法を利用して、すべての自然数 n に対して、

$$f_n(x) \geq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$f_1(x) = e^x - 1 - x$$

となるから、(1)より、 $f_1(x) = f_2'(x)$ である。(1)の過程より、 $x \geq 0$ の範囲で $f_2'(x) \geq 0$ と

なるから、 $f_1(x) \geq 0$ である。よって、 $n=1$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つ。

[2] $n=m$ (m は自然数) のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定し、 $n=m+1$ で $\textcircled{1}$ が成り立つことを示す。

$$f_{m+1}(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}$$

となるから、これを微分して、

$$f_{m+1}'(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^m}{m!} = f_m(x)$$

となる。帰納法の仮定より、 $f_{m+1}'(x) = f_m(x) \geq 0$ となるから、 $f_{m+1}(x)$ は広義単調増加で

ある。これと、

$$\begin{aligned} f_{m+1}(0) &= e^0 - 1 - 0 - \frac{0^2}{2!} - \cdots - \frac{0^{m+1}}{(m+1)!} \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、

$$f_{m+1}(x) \geq f_{m+1}(0) = 0$$

となる。よって、 $n=m+1$ のときも $\textcircled{1}$ が成り立つ。

以上[1],[2]より、題意は示された。

(証明終)

(3)

$g_2(x) = xf_2(x) - f_3(x)$ とする。

$$\begin{aligned} g_2'(x) &= \{xf_2(x) - f_3(x)\}' \\ &= f_2(x) + xf_2'(x) - f_3'(x) \end{aligned}$$

であり、(2)の過程より $f_3'(x) = f_2(x)$ 、 $f_2'(x) = f_1(x)$ となるから、

$$g_2'(x) = xf_1(x)$$

である。(2)より、 $x \geq 0$ の範囲で $f_1(x) \geq 0$ であるから、

$$g_2'(x) = xf_1(x) \geq 0$$

となる。よって、 $x \geq 0$ の範囲で $g_2(x)$ は広義単調増加であるから、

$$g_2(x) \geq g_2(0) = 0 \cdot f_2(0) - f_3(0) = 0$$

となる。したがって、

$$g_2(x) = xf_2(x) - f_3(x) \geq 0$$

$$\therefore f_3(x) \leq xf_2(x)$$

となり、題意は示された。

(証明終)

(4)

まず、(3)と同様にして、

$$2 \text{ 以上の自然数 } n \text{ に対して、 } f_{n+1}(x) \leq xf_n(x) \text{ である } \quad \cdots \textcircled{3}$$

ことを示す。2 以上の自然数 n に対して、 $g_n(x) = xf_n(x) - f_{n+1}(x)$ とする。

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \{xf_n(x) - f_{n+1}(x)\}' \\ &= f_n(x) + xf_n'(x) - f_{n+1}'(x) \end{aligned}$$

であり、(2)の過程より $f_{n+1}'(x) = f_n(x)$ 、 $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$ となるから、

$$g_n'(x) = xf_{n-1}(x)$$

である。(2)より、 $x \geq 0$ の範囲で $f_{n-1}(x) \geq 0$ であるから、

$$g_n'(x) = xf_{n-1}(x) \geq 0$$

となる。よって、 $x \geq 0$ の範囲で $g_n(x)$ は広義単調増加であるから、

$$g_n(x) \geq g_n(0) = 0 \cdot f_n(0) - f_{n+1}(0) = 0$$

となる。したがって、

$$g_n(x) = xf_n(x) - f_{n+1}(x) \geq 0$$

$$\therefore f_{n+1}(x) \leq xf_n(x)$$

となり、 $\textcircled{3}$ が示された。よって、3 以上の自然数 n に対して、 $x \geq 0$ の範囲で

$$f_n(x) \leq xf_{n-1}(x) \leq x^2 f_{n-2}(x) \leq \cdots \leq x^{n-2} f_2(x)$$

が成り立つ。これと(2)より、3 以上の自然数 n に対して、

$$0 \leq f_n(x) \leq x^{n-2} f_2(x)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq e^x - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \leq x^{n-2} f_2(x)$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 - x^{n-2} f_2(x) \leq \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \leq e^x - 1$$

となる。 $0 \leq x < 1$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{e^x - 1 - x^{n-2} f_2(x)\} = e^x - 1$$

となるから、はさみうちの定理より、 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1$ が示された。

(証明終)