

2018年度

M 3

数 学

2月25日(日)

理 学 部 (数学科)

9 : 30 ~ 11 : 30

【前 期 日 程】

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れてはいけません。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4枚)に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出なさい。
- 4 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記しなさい。
- 6 問題は、声を出して読むではいけません。
- 7 各問の配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰りなさい。

1

自然数 k に対して、分母が $2k+1$ 、分子が k 以下の自然数の平方からなる分数を考える。このような分数を、分母の小さい順に、分母が同じ場合には分子の大きい順に並べてできる数列を作り、下のように群に分ける。

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{3} & | & \frac{4}{5}, \frac{1}{5} & | & \frac{9}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7} & | & \frac{16}{9}, \frac{9}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9} & | & \frac{25}{11}, \frac{16}{11}, \frac{9}{11}, \frac{4}{11}, \frac{1}{11} & | & \frac{36}{13}, \frac{25}{13}, \dots \end{array}$$

第1群 第2群 第3群 第4群 第5群

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 n 群の最初の項を n を用いて表せ。

(2) $\frac{36}{23}$ が第何項になるかを求めよ。

(3) 第 n 群の項の総和を S_n とする。このとき、 $\sum_{k=1}^n S_k$ の値 S を n を用いて表せ。

(4) 初項から第 376 項までの和を求めよ。

(配点 25 %)

2 平面上の 3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が

$$|\vec{a}| = \sqrt{p}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{q}, \quad |\vec{c}| = \sqrt{p+q}, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = p, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = q$$

を満たしている。ただし、 p, q は正の数で $p \neq q$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないことを示せ。

(2) $\vec{c}$ を $\vec{a}, \vec{b}, p, q$ を用いて表せ。

(配点 25 %)

3 座標平面上で、曲線 $y = -x^2 + 1$ ($0 \leq x \leq 1$) を C とする。実数 a, b を定数とする 2 次関数

$$y = 2x^2 + ax + b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) $\textcircled{1}$ のグラフが曲線 C と共有点を 2 点持つとき、 a, b が満たす条件を求めよ。
- (2) a, b が (1) で求めた条件を満たすとき、 $\textcircled{1}$ のグラフの頂点が描く図形を座標平面上に図示せよ。
- (3) (2) で求めた図形の境界線で囲まれた領域のうち $y \geq 0$ の部分を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(配点 25 %)

4 $x \geq 0$ の範囲で、関数

$$f_n(x) = e^x - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f_2(x) \geq 0$ であることを示せ。
- (2) すべての自然数 n に対して、 $f_n(x) \geq 0$ であることを示せ。
- (3) $f_3(x) \leq x f_2(x)$ が成り立つことを示せ。
- (4) $0 \leq x < 1$ を満たす x について、 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1$ が成り立つことを示せ。

(配点 25 %)