

(1)

 $b=1$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (a+2)x + 2a \\ &= (x-a)(x-2) \end{aligned}$$

であるから、

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow (x-a)(x-2) < 0$$

であり、 a の値の範囲で場合分けすると、この不等式の解は

$$a < 2 \text{ のとき } a < x < 2$$

$$a = 2 \text{ のとき } (x-2)^2 \geq 0 \text{ より解なし}$$

$$a > 2 \text{ のとき } 2 < x < a$$

となる。

(答) $a < 2$ のとき $a < x < 2$ $a = 2$ のとき解なし $a > 2$ のとき $2 < x < a$

(2)

$f(x) < 0$ を満たす整数がちょうど3個あるとき、 $a < 2$ ならば、 $a < x < 2$ より、3個の整数解は $x = -1, 0, 1$ となるので、求める a の範囲は $-2 \leq a < -1$ である。同様に、 $a > 2$ ならば、 $2 < x < a$ より、 $x = 3, 4, 5$ となるので、 $5 < a \leq 6$ である。

(答) $-2 \leq a < -1, 5 < a \leq 6$

(3)

 $f(1) = 4$ は

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 \\ \Leftrightarrow 1 - a - 2b + 2ab &= 4 \\ \Leftrightarrow 2ab - a - 2b - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(2b-1) &= 4 \end{aligned}$$

と変形できる。 a, b が整数のとき、 $a-1, 2b-1$ はともに整数であり、 $2b-1$ は奇数であることに注意すると、整数 $a-1, 2b-1$ の組は

$$(a-1, 2b-1) = (4, 1), (-4, -1)$$

の2組が考えられる。これらを解くと、 $(a, b) = (5, 1), (-3, 0)$ である。

(答) $(a, b) = (5, 1), (-3, 0)$

(1)

$f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3b$ より, $\frac{1}{3}f'(x) = x^2 - 2ax + b$ である。したがって,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3ax^2 + 3bx - ab \\ &= (x^2 - 2ax + b)(x - a) + 2(b - a^2)x \\ &= \frac{1}{3}f'(x)(x - a) + 2(b - a^2)x \end{aligned}$$

と変形できることから, 求める商および余りは, それぞれ $x - a, 2(b - a^2)x$ である。

(答) 商: $x - a$, 余り: $2(b - a^2)x$

(2)

$f(x)$ について,

「 $f(x)$ が極値をもつ」

$\Leftrightarrow$ 「 $f'(x)$ が符号変化する」

$\Leftrightarrow$ 「 $\frac{1}{3}f'(x)$ が符号変化する」

$\Leftrightarrow$ 「方程式 $x^2 - 2ax + b = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ」

が成立する。方程式 $x^2 - 2ax + b = 0$ の判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4} = a^2 - b$$

であり, この方程式が異なる 2 つの実数解をもつとき,

$$D > 0 \Leftrightarrow b < a^2$$

となる。したがって, 求める条件は, $b < a^2$ である。

(答) $b < a^2$

(3)

$f(x)$ が $x = \alpha$ で極大値 0 をとるとき, (2) の結果から $b < a^2$ および

$$\begin{cases} f(\alpha) = 0 & \dots \textcircled{1} \\ f'(\alpha) = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成立する。このとき, (1) より

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1}{3}f'(\alpha)(\alpha - a) + 2(b - a^2)\alpha \\ &= 2(b - a^2)\alpha \quad (\because f'(\alpha) = 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立ち, (2) より $b - a^2 \neq 0$ であるから, $\alpha = 0$ である。ここで, 方程式 $f'(x) = 0$ の $x = \alpha$ 以外の実数解を $x = \beta$ とすると, $f(x)$ は $x = \beta$ で極小となり, $\alpha < \beta$ である。また, 解と係数の関係より

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2a \\ \alpha\beta &= b \end{aligned}$$

が成り立つから, $\alpha = 0$ より $\beta = 2a, b = 0$ となる。 $\alpha < \beta$ であることを考慮すると,

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow a > 0$$

となり, これが $f(x)$ が $x = \alpha$ で極大値をとるための a の条件である。したがって, $f(x)$ が $x = \alpha$ で極大値 0 をとるとき, $a > 0, \alpha = 0$ である。

(答) $a > 0, \alpha = 0$

3

(1)

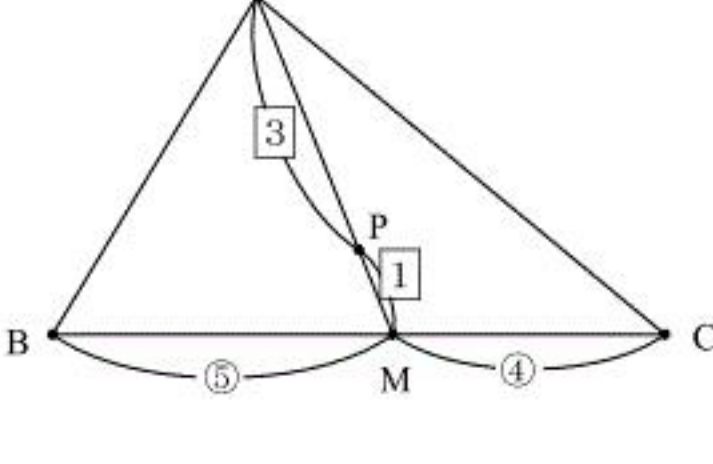
$x=y=0$ のとき、

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AP}+4(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+5(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 12\overrightarrow{AP} &= 4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9}(4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}) \end{aligned}$$

となる。したがって、直線 AP と直線 BC の交点を点 M とすると、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AM}$$

であり、点 M は辺 BC を 5:4 に内分する点である。図を示すと以下のようになる。



ここで、 $\triangle ABC$ の面積を S とおくと、 $AM:PM=4:1$ より、 $\triangle PBC = \frac{1}{4}S$ である。また、

$$\triangle PAB = \frac{3}{4} \triangle ABM = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9} \triangle ABC = \frac{5}{12}S$$

$$\triangle PCA = \frac{3}{4} \triangle ACM = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} \triangle ABC = \frac{1}{3}S$$

である。したがって、

$$\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = \frac{5}{12}S : \frac{1}{4}S : \frac{1}{3}S = 5:3:4$$

となる。

(答) $\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = 5:3:4$

(2)

(1)と同様に与式を整理すると、

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC} &= x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow 12\overrightarrow{AP} &= (4-x)\overrightarrow{AB}+(5-y)\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{12}(4-x)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}(5-y)\overrightarrow{AC} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、点 P が $\triangle ABC$ の周および内部にあるとき、

$$0 \leq \frac{1}{12}(4-x) \leq 1$$

$$0 \leq \frac{1}{12}(5-y) \leq 1$$

$$0 \leq \frac{1}{12}(4-x) + \frac{1}{12}(5-y) \leq 1$$

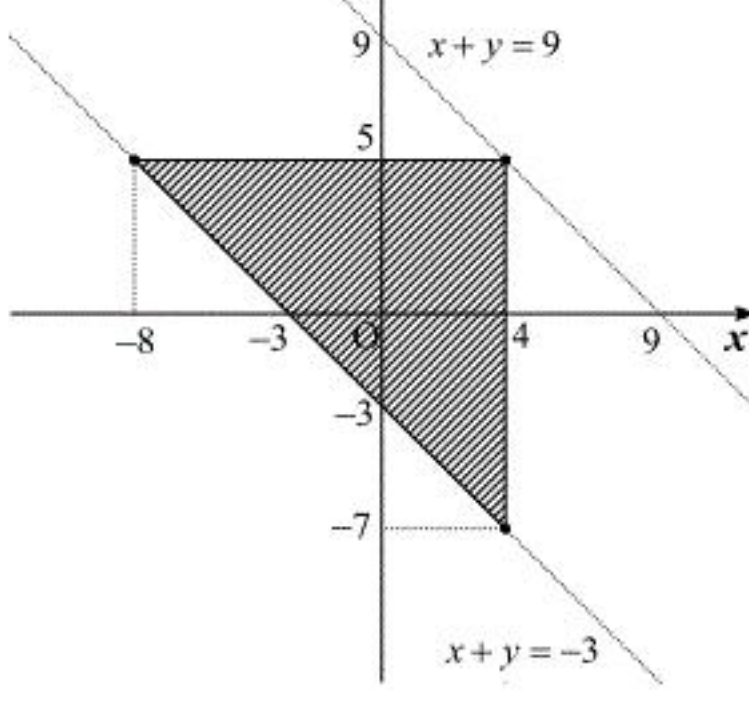
が成立する。整理すると、

$$-8 \leq x \leq 4$$

$$-7 \leq y \leq 5$$

$$-3 \leq x+y \leq 9$$

となる。以上より、求める領域は以下の斜線部である。ただし、境界線をすべて含む。



(答) 前図

(3)

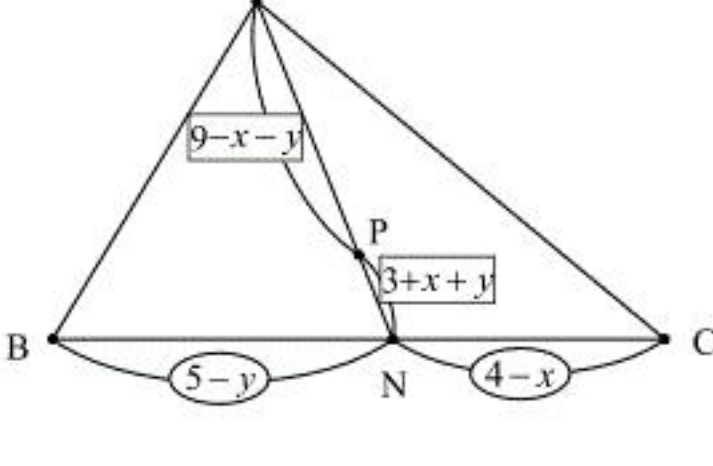
まず、 $(x, y) = (4, 5)$ であるとき、与式は、 $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$ となるため、点 A, P が一致するため、明らかに条件を満たさない。したがって、(2)の結果とあわせて、以下では $x+y \neq 9$ として考える。このとき、(1)と同様に考えて、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{9-x-y}{12} \cdot \frac{1}{9-x-y} \{ (4-x)\overrightarrow{AB} + (5-y)\overrightarrow{AC} \}$$

となる。したがって、直線 AP と直線 BC の交点を点 N とすると、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{9-x-y}{12} \overrightarrow{AN}$$

であり、点 N は辺 BC を $(5-y):(4-x)$ に内分する点である。図を示すと以下のようになる。



ここで、 $\triangle ABC$ の面積を S とおくと、 $AN:PN=12:(3+x+y)$ より、 $\triangle PBC = \frac{3+x+y}{12}S$ である。また、

$$\triangle PAB = \frac{9-x-y}{12} \triangle ABN = \frac{9-x-y}{12} \cdot \frac{5-y}{9-x-y} \triangle ABC = \frac{5-y}{12}S$$

$$\triangle PCA = \frac{9-x-y}{12} \triangle ACN = \frac{9-x-y}{12} \cdot \frac{4-x}{9-x-y} \triangle ABC = \frac{4-x}{12}S$$

である。したがって、

$$\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = \frac{5-y}{12}S : \frac{3+x+y}{12}S : \frac{4-x}{12}S = (5-y):(3+x+y):(4-x)$$

となる。ここで、条件より、

$$(5-y):(3+x+y):(4-x) = 1:2:3$$

となるので、実数 k を用いて、

$$5-y=k, 3+x+y=2k, 4-x=3k$$

と表せる。これを解くと、

$$x=-2, y=3, k=2$$

となる。これは(2)で求めた領域上に存在する。したがって、求める点は $(-2, 3)$ である。

(答) $(-2, 3)$

(4)

点 P が線分 CD 上にあるとき、 $1 \leq \ell \leq 2$ となる実数 ℓ を用いて、

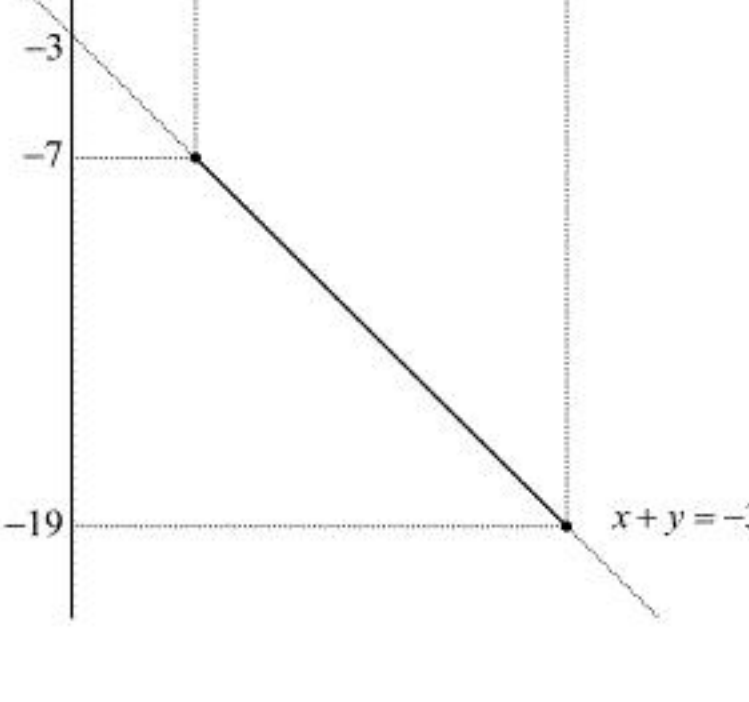
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \ell \overrightarrow{BC} = (1-\ell)\overrightarrow{AB} + \ell \overrightarrow{AC} \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表せる。ここで、 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は三角形の辺をなすため、 $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ かつ $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ かつ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は平行でないから、①、②より、

$$\frac{1}{12}(4-x) = 1-\ell, \frac{1}{12}(5-y) = \ell, \quad 1 \leq \ell \leq 2$$

$$\therefore x+y=-3, \quad 4 \leq x \leq 16$$

となる。以上より、求める領域は以下のようになる。



(答) 前図

(1)

$x = \sqrt[5]{64} = 2^{\frac{6}{5}}$ について、 $\log_2 2^{\frac{6}{5}} = \frac{6}{5} = 1.2$ であることから、 $f(\sqrt[5]{64}) = 1$ 、 $g(\sqrt[5]{64}) = 0.2$ である。また、 $x = 2019$ について、

$$\begin{aligned}\log_2 2019 &= \log_2 1024 \cdot \frac{2019}{1024} \\ &= \log_2 1024 + \log_2 \frac{2019}{1024} \\ &= 10 + \log_2 \frac{2019}{1024}\end{aligned}$$

である。ここで、 $1 < \frac{2019}{1024} < 2$ であることから、 $0 < \log_2 \frac{2019}{1024} < 1$ である。したがって、

$f(2019) = 10$ となる。

(答) $f(\sqrt[5]{64}) = 1$ 、 $g(\sqrt[5]{64}) = 0.2$ 、 $f(2019) = 10$

(2)

$\log_2(x+1) = f(x+1) + g(x+1)$ 、 $\log_2 x = f(x) + g(x)$ である。ここで、2 式を辺々引くと

$$\log_2(x+1) - \log_2 x = f(x+1) - f(x) + g(x+1) - g(x)$$

である。ここで、左辺について、底が1より大きいことから、 $\log_2(x+1) - \log_2 x > 0$ である。したがって、右辺について、 $f(x+1) = f(x)$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}g(x+1) - g(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow g(x+1) &> g(x)\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

$\log_2(x+1) = f(x+1) + g(x+1)$ 、 $\log_2 x = f(x) + g(x)$ である。ここで、2 式を辺々引くと

$$\log_2(x+1) - \log_2 x = f(x+1) - f(x) + g(x+1) - g(x)$$

である。ここで、左辺について、

$$\begin{aligned}\log_2(x+1) - \log_2 x &= \log_2 \frac{x+1}{x} \\ &= \log_2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

となる。ここで、 $x > 1$ であることから $1 + \frac{1}{x} < 2$ である。したがって、 $\log_2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1$ である。

よって、右辺について、 $f(x+1) = f(x) + 1$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}1 + g(x+1) - g(x) &< 1 \\ \Leftrightarrow g(x+1) &< g(x)\end{aligned}$$

となる。

(証明終)