

(1)

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} &= \log_2 a_{n+1} \\
 &= \log_2 (a_n^3 4^n) \\
 &= \log_2 (a_n^3) + \log_2 (2^{2n}) \\
 &= 3 \log_2 a_n + 2n \\
 &= 3b_n + 2n
 \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad b_{n+1} = 3b_n + 2n$$

(2)

$f(n) = \alpha n + \beta$ とすると,

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - f(n+1) &= 3\{b_n - f(n)\} \\
 \Leftrightarrow (3b_n + 2n) - \{\alpha(n+1) + \beta\} &= 3\{b_n - (\alpha n + \beta)\} \\
 \Leftrightarrow (2\alpha + 2)n - \alpha + 2\beta &= 0
 \end{aligned}$$

となる。よって、この式が全ての自然数 n に対して常に成立するのは、

$$2\alpha + 2 = 0 \text{ かつ } -\alpha + 2\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1, \beta = -\frac{1}{2}$$

となるときである。

$$(答) \quad \alpha = -1, \beta = -\frac{1}{2}$$

(3)

(2)の結果より、 $f(n) = -n - \frac{1}{2}$ に対し、数列 $\{b_n - f(n)\}$ は初項 $b_1 - f(1)$ 、公比 3 の等比数列と

なる。ここで、

$$b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 b_n - f(n) &= \{b_1 - f(1)\} \cdot 3^{n-1} \\
 \Leftrightarrow b_n - \left(-n - \frac{1}{2}\right) &= \left\{1 - \left(-1 - \frac{1}{2}\right)\right\} \cdot 3^{n-1} \\
 \Leftrightarrow b_n &= \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - n - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
 b_n &= \log_2 a_n \\
 \Leftrightarrow a_n &= 2^{b_n} \\
 \Leftrightarrow a_n &= 2^{\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - n - \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad a_n = 2^{\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - n - \frac{1}{2}}, b_n = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - n - \frac{1}{2}$$

(1)

$f(x) = e^x \sin x$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \sin x + e^x \cos x \\ &= e^x (\sin x + \cos x) \\ &= e^x \cdot \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

となり、 $0 \leq x \leq 2\pi$ において $f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ のときである。よって、 $f(x)$

の $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲における増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{3\pi}{4}$	...	$\frac{7\pi}{4}$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって、 $f(x)$ は $x = \frac{3\pi}{4}$ で極大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}}$ 、 $x = \frac{7\pi}{4}$ で極小値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{7\pi}{4}}$ をとる。同様に

$g(x) = e^x \cos x$ を微分すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x \cos x + e^x (-\sin x) \\ &= e^x (-\sin x + \cos x) \\ &= e^x \cdot \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

となり、 $0 \leq x \leq 2\pi$ において $g'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ のときである。よって、 $g(x)$ の

$0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲における増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{5\pi}{4}$	...	2π
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって、 $g(x)$ は $x = \frac{\pi}{4}$ で極大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$ 、 $x = \frac{5\pi}{4}$ で極小値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad f(x): x = \frac{3\pi}{4} \text{ のとき極大値 } \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}}, \quad x = \frac{7\pi}{4} \text{ のとき極小値 } -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{7\pi}{4}}$$

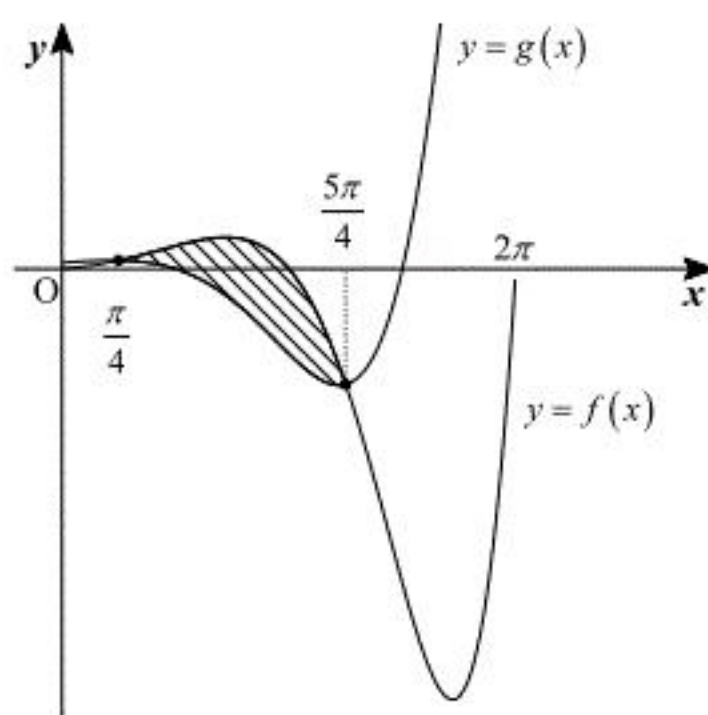
$$g(x): x = \frac{\pi}{4} \text{ のとき極大値 } \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}, \quad x = \frac{5\pi}{4} \text{ のとき極小値 } -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}}$$

(2)

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の2式を連立して

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= e^x \cos x \\ \Leftrightarrow e^x (\sin x - \cos x) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^x \cdot \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = 0, \pi \quad (\because -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4}) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

となることから、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点は $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}} \right), \left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}} \right)$ の2点だとわかる。 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の概形を図示すると以下のようになる。



求めるべきは、上図の斜線部分の領域の面積であり、これを S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) e^x dx \\ &= \left[(\sin x - \cos x) e^x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos x + \sin x) e^x dx \\ &= \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{\frac{5\pi}{4}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{\frac{\pi}{4}} \right\} - \left\{ \left[(\cos x + \sin x) e^x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (-\sin x + \cos x) e^x dx \right\} \\ &= 0 - 0 - \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{\frac{5\pi}{4}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{\frac{\pi}{4}} \right\} - S \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} 2S &= \sqrt{2} \left(e^{\frac{5\pi}{4}} + e^{\frac{\pi}{4}} \right) \\ \therefore S &= \frac{e^{\frac{5\pi}{4}} + e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{e^{\frac{5\pi}{4}} + e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

(3)

上図より、「 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、2 曲線 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ と y 軸で囲まれた図形を x 軸の

まわりに1回転してできる回転体」の $x = t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$) での断面は、中心が同じで半径がそ

れぞれ $g(t)$ 、 $f(t)$ ($g(t) \geq f(t)$) の2つの円で囲まれた部分の図形と考えることができる。その図形の面積を $U(t)$ 、回転体の体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} U(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi \left[\{g(t)\}^2 - \{f(t)\}^2 \right] dt \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 t - \sin^2 t) e^{2t} dt \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2t) e^{2t} dt \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \left[(\cos 2t) \cdot \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\sin 2t) e^{2t} dt \\ &= 0 - \frac{1}{2} + \left[(\sin 2t) \cdot \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2t) e^{2t} dt \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - 0 - \frac{V}{\pi} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{V}{\pi} &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right) \\ \therefore V &= \frac{\pi}{4} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{4} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right)$$

(1)

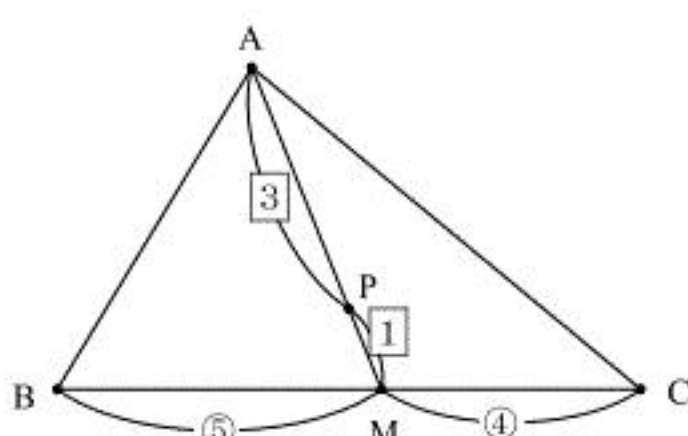
 $x = y = 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
 3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + 5\overrightarrow{PC} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AP} + 4(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 5(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow 12\overrightarrow{AP} &= 4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9}(4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC})
 \end{aligned}$$

となる。したがって、直線 AP と直線 BC の交点を点 M とすると、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AM}$$

であり、点 M は辺 BC を 5:4 に内分する点である。図を示すと以下のようになる。



ここで、 $\triangle ABC$ の面積を S とおくと、 $AM:PM = 4:1$ より、 $\triangle PBC = \frac{1}{4}S$ である。また、

$$\triangle PAB = \frac{3}{4}\triangle ABM = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9}\triangle ABC = \frac{5}{12}S$$

$$\triangle PCA = \frac{3}{4}\triangle ACM = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}\triangle ABC = \frac{1}{3}S$$

である。したがって、

$$\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = \frac{5}{12}S : \frac{1}{4}S : \frac{1}{3}S = 5:3:4$$

となる。

(答) $\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = 5:3:4$

(2)

(1)と同様に与式を整理すると、

$$\begin{aligned}
 3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + 5\overrightarrow{PC} &= x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \\
 \Leftrightarrow 12\overrightarrow{AP} &= (4-x)\overrightarrow{AB} + (5-y)\overrightarrow{AC} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{12}(4-x)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}(5-y)\overrightarrow{AC} \quad \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、点 P が $\triangle ABC$ の周および内部にあるとき、

$$0 \leq \frac{1}{12}(4-x) \leq 1$$

$$0 \leq \frac{1}{12}(5-y) \leq 1$$

$$0 \leq \frac{1}{12}(4-x) + \frac{1}{12}(5-y) \leq 1$$

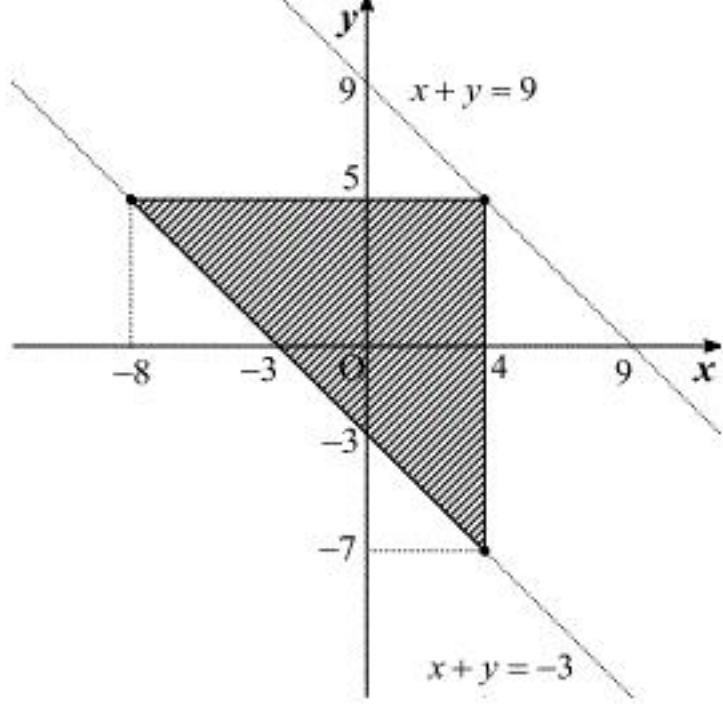
が成立する。整理すると、

$$-8 \leq x \leq 4$$

$$-7 \leq y \leq 5$$

$$-3 \leq x+y \leq 9$$

となる。以上より、求める領域は以下の斜線部である。ただし、境界線をすべて含む。



(答) 前図

(3)

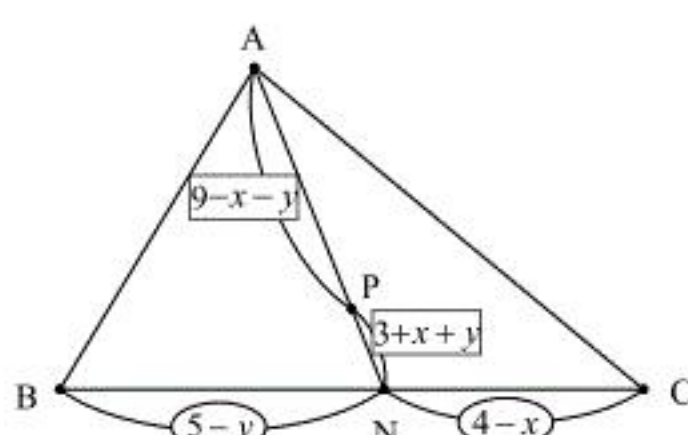
まず、 $(x, y) = (4, 5)$ であるとき、与式は、 $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$ となるため、点 A, P が一致するため、明らかに条件を満たさない。したがって、(2)の結果とあわせて、以下では $x+y \neq 9$ として考える。このとき、(1)と同様に考えて、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{9-x-y}{12} \cdot \frac{1}{9-x-y} \{ (4-x)\overrightarrow{AB} + (5-y)\overrightarrow{AC} \}$$

となる。したがって、直線 AP と直線 BC の交点を点 N とすると、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{9-x-y}{12}\overrightarrow{AN}$$

であり、点 N は辺 BC を $(5-y):(4-x)$ に内分する点である。図を示すと以下のようになる。



ここで、 $\triangle ABC$ の面積を S とおくと、 $AN:PN = 12:(3+x+y)$ より、 $\triangle PBC = \frac{3+x+y}{12}S$ である。また、

$$\triangle PAB = \frac{9-x-y}{12}\triangle ABN = \frac{9-x-y}{12} \cdot \frac{5-y}{9-x-y}\triangle ABC = \frac{5-y}{12}S$$

$$\triangle PCA = \frac{9-x-y}{12}\triangle ACN = \frac{9-x-y}{12} \cdot \frac{4-x}{9-x-y}\triangle ABC = \frac{4-x}{12}S$$

である。したがって、

$$\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = \frac{5-y}{12}S : \frac{3+x+y}{12}S : \frac{4-x}{12}S = (5-y):(3+x+y):(4-x)$$

となる。ここで、条件より、

$$(5-y):(3+x+y):(4-x) = 1:2:3$$

となるので、実数 k を用いて、

$$5-y=k, 3+x+y=2k, 4-x=3k$$

と表せる。これを解くと、

$$x=-2, y=3, k=2$$

となる。これは(2)で求めた領域上に存在する。したがって、求める点は $(-2, 3)$ である。

(答) $(-2, 3)$

(4)

点 P が線分 CD 上にあるとき、 $1 \leq \ell \leq 2$ となる実数 ℓ を用いて、

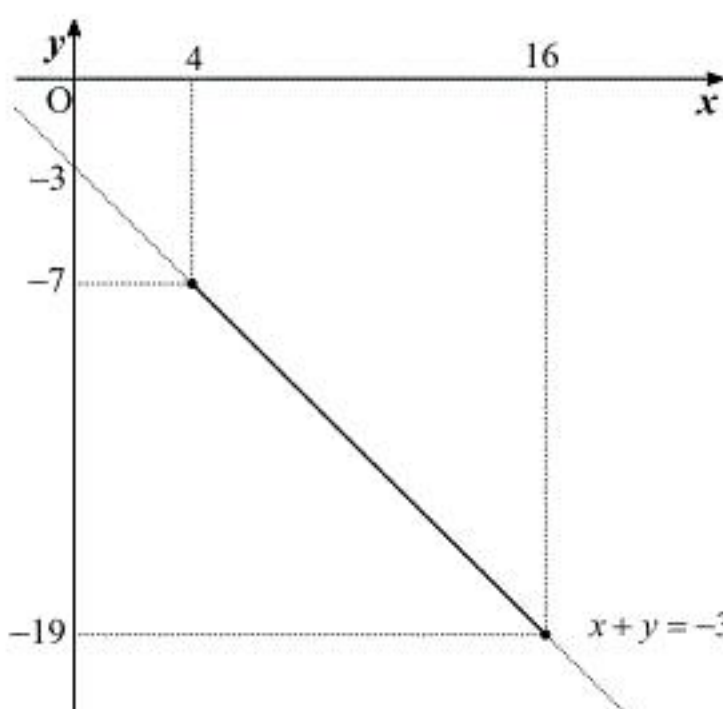
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{BC} = (1-\ell)\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC} \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表せる。ここで、 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は三角形の辺をなすため、 $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ かつ $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ かつ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は平行でないから、①、②より、

$$\frac{1}{12}(4-x) = 1-\ell, \frac{1}{12}(5-y) = \ell, 1 \leq \ell \leq 2$$

$$\therefore x+y=-3, 4 \leq x \leq 16$$

となる。以上より、求める領域は以下のようになる。



(答) 前図

(1)

 $n=100a+10b+c$ について、

$$\begin{aligned} n &= 100a+10b+c \\ &= 3 \cdot (10a+b-2c) + 7 \cdot (10a+b+c) \end{aligned}$$

である。ここで、 a, b, c が0から9までの整数であるので、 $7 \cdot (10a+b+c)$ は7の倍数である。したがって、3と7が互いに素であることに注意すると、

$$n \text{ が } 7 \text{ の倍数} \Leftrightarrow 3 \cdot (10a+b-2c) \text{ が } 7 \text{ の倍数} \Leftrightarrow 10a+b-2c \text{ が } 7 \text{ の倍数}$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)より、 $10a+b-2c$ が7の倍数となることを考える。条件より、

$10a+b-2c=8a+b=7a+(a+b)$ となる。これが7の倍数となるのは、 $a+b$ が7の倍数、つまり $a+b=7, 14$ となるときであり、

$$\begin{aligned} (a, b) &= (0, 7), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), \\ &\quad (5, 9), (6, 1), (6, 8), (7, 0), (8, 6), (9, 5) \end{aligned}$$

の12通りである。

(答) 12通り

(3)

(1)より、 $10a+b-2c$ が7の倍数となることを考える。条件より、

$10a+b-2c=11a-2c=7a+2 \cdot (2a-c)$ となる。これが7の倍数となるのは、 $2a-c$ が7の倍数、つまり $2a-c=-7, 0, 7, 14$ となるときであり、

$$\begin{aligned} (a, c) &= (0, 7), (1, 2), (1, 9), (2, 4), (3, 6), (4, 1), \\ &\quad (4, 8), (5, 3), (6, 5), (7, 0), (8, 2), (8, 9), (9, 4) \end{aligned}$$

の13通りである。

(答) 13通り

(4)

(1)から(3)を考えると、 n が7の倍数かつ a, b, c が互いに異なるときに3枚のカードが7の倍数となる。ここで、 $a \neq b, a = c$ であるのは(1)より12通り、 $a = b, a \neq c$ であるのは(2)より13通りである。また、 $b = c, a \neq c$ となるとき、 $10a+b-2c=7a+(3a-b)$ となる。これが7の倍数となるのは、 $3a-b$ が7の倍数、つまり $3a-b=-7, 0, 7, 14, 21$ となるときであり、

$$\begin{aligned} (a, b) &= (0, 7), (1, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 9), (4, 5), \\ &\quad (5, 1), (5, 8), (6, 4), (7, 0), (8, 3), (9, 6) \end{aligned}$$

の12通りである。さらに、 $a=b=c$ となるのは、 $10a+b-2c=9a$ となることより、 $a=0, 7$ の2通りである。以上より、 a, b, c どれか2つ以上の数字が重複するのは39通りある。一方、0以上999以下の7の倍数は $999=142 \cdot 7+5$ より、143個存在する。したがって、 n が7の倍数かつ a, b, c が互いに異なるのは $143-39=104$ (通り)である。ここで、3枚のカードの並べ方の総数は ${}_{10}P_3$ 通りあり、全て同様に確からしい。したがって、求める確率は

$$\frac{104}{{}_{10}P_3} = \frac{13}{90}$$

となる。

(答) $\frac{13}{90}$