

(1)

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} &= \log_2 a_{n+1} \\
 &= \log_2 (a_n^3 4^n) \\
 &= \log_2 (a_n^3) + \log_2 (2^{2n}) \\
 &= 3 \log_2 a_n + 2n \\
 &= 3b_n + 2n
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_{n+1} = 3b_n + 2n$$

(2)

$f(n) = \alpha n + \beta$ とすると,

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - f(n+1) &= 3\{b_n - f(n)\} \\
 \Leftrightarrow (3b_n + 2n) - \{\alpha(n+1) + \beta\} &= 3\{b_n - (\alpha n + \beta)\} \\
 \Leftrightarrow (2\alpha + 2)n - \alpha + 2\beta &= 0
 \end{aligned}$$

となる。よって、この式が全ての自然数 n に対して常に成立するのは,

$$2\alpha + 2 = 0 \text{ かつ } -\alpha + 2\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1, \beta = -\frac{1}{2}$$

となるときである。

$$(\text{答}) \quad \alpha = -1, \beta = -\frac{1}{2}$$

(3)

(2)の結果より、 $f(n) = -n - \frac{1}{2}$ に対し、数列 $\{b_n - f(n)\}$ は初項 $b_1 - f(1)$ 、公比 3 の等比数列と

なる。ここで、

$$b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 b_n - f(n) &= \{b_1 - f(1)\} \cdot 3^{n-1} \\
 \Leftrightarrow b_n - \left(-n - \frac{1}{2}\right) &= \left\{1 - \left(-1 - \frac{1}{2}\right)\right\} \cdot 3^{n-1} \\
 \Leftrightarrow b_n &= \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - n - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
 b_n &= \log_2 a_n \\
 \Leftrightarrow a_n &= 2^{b_n} \\
 \Leftrightarrow a_n &= 2^{\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - n - \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2^{\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - n - \frac{1}{2}}, b_n = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - n - \frac{1}{2}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^b e^{2x} \cos 2x dx \\
 &= \left[(\cos 2x) \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^b - \int_0^b (-\sin 2x) e^{2x} dx \\
 &= \frac{1}{2} e^{2b} \cos 2b - \frac{1}{2} + J \\
 \therefore I - J &= \frac{1}{2} (e^{2b} \cos 2b - 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^b e^{2x} \sin 2x dx \\
 &= \left[(\sin 2x) \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^b - \int_0^b (\cos x) e^{2x} dx \\
 &= \frac{1}{2} e^{2b} \sin 2b - 0 - I \\
 \therefore I + J &= \frac{1}{2} e^{2b} \sin 2b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

となる。(①+②)÷2から

$$I = \frac{1}{4} (e^{2b} \sin 2b + e^{2b} \cos 2b - 1)$$

と求まる。同様に、(②-①)÷2から

$$J = \frac{1}{4} (e^{2b} \sin 2b - e^{2b} \cos 2b + 1)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad I = \frac{1}{4} (e^{2b} \sin 2b + e^{2b} \cos 2b - 1), \quad J = \frac{1}{4} (e^{2b} \sin 2b - e^{2b} \cos 2b + 1)$$

(2)

$f(x) = g(x)$ を変形すると、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \\
 \Leftrightarrow e^x \sin x &= a \sin x \\
 \Leftrightarrow (e^x - a) \sin x &= 0 \\
 \Leftrightarrow e^x &= a \text{ または } \sin x = 0
 \end{aligned}$$

となる。 $\sin x = 0$ を満たす正の実数 x のうち最小のものは $x = \pi$ であることに注意して、以下、 a の値の範囲で場合分けする。

[1] $a = 0$ のとき

$e^x = a$ は解をもたず、 $x = \pi$ が求める値である。

[2] $0 < a \leq 1$ のとき

$e^x = a$ の解は $x = \log a \leq \log 1 = 0$ となるから、 $x = \pi$ が求める値である。

[3] $1 < a \leq e^\pi$ のとき

$e^x = a$ の解は $x = \log a$ であり、 $\log 1 < \log a \leq \log e^\pi$ 、つまり $0 < \log a \leq \pi$ を満たしているから、 $x = \log a$ が求める値である。

[4] $e^\pi < a$ のとき

$e^x = a$ の解は $x = \log a$ であり、 $\log e^\pi < \log a$ 、つまり $\pi < \log a$ を満たしているから、 $x = \pi$ が求める値である。

以上[1]から[4]より、 $0 \leq a \leq 1, e^\pi < a$ のとき $x = \pi$ 、 $1 < a \leq e^\pi$ のとき $x = \log a$ となる。

$$(\text{答}) \quad x = \pi \quad (0 \leq a \leq 1, e^\pi < a \text{ のとき}), \quad x = \log a \quad (1 < a \leq e^\pi \text{ のとき})$$

(3)

$0 \leq x \leq x_0$ の範囲で 2 曲線 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を K とする。 K の $x = t$ ($0 \leq t \leq x_0$) での断面を L_t とし、 L_t の面積を $S(t)$ とする。以下、 a の値の範囲で場合分けして $V(a)$ を求める。

[1] $a = 0$ のとき

(2)より $x_0 = \pi$ であり、 L_t は、半径が $f(t)$ の円と考えることができるから、 $V(a)$ は

$$\begin{aligned}
 V(a) &= \int_0^\pi S(t) dt \\
 &= \int_0^\pi \pi \{f(t)\}^2 dt \\
 &= \pi \int_0^\pi (\sin^2 t) e^{2t} dt \\
 &= \pi \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) e^{2t} dt \\
 &= \pi \left(\frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2t} dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2t} \cos 2t dt \right)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、(1)で求めた I に $b = \pi$ を適用すると、

$$\begin{aligned}
 V(a) &= \pi \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^\pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (e^{2\pi} \sin 2\pi + e^{2\pi} \cos 2\pi - 1) \right\} \\
 &= \frac{\pi}{8} (e^{2\pi} - 1)
 \end{aligned}$$

と求められる。

[2] $0 < a \leq 1$ のとき

(2)より $x_0 = \pi$ であり、 L_t は、中心が同じで半径がそれぞれ $g(t)$ 、 $f(t)$ ($g(t) \leq f(t)$) の 2 つの円で囲まれた部分の図形と考えることができるから、 $V(a)$ は

$$\begin{aligned}
 V(a) &= \int_0^\pi S(t) dt \\
 &= \int_0^\pi \pi \left[\{f(t)\}^2 - \{g(t)\}^2 \right] dt \\
 &= \pi \int_0^\pi (\sin^2 t) e^{2t} dt - \pi a^2 \int_0^\pi \sin^2 t dt
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\int_0^\pi \sin^2 t dt = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

であり、[1]の結果より

$$V(a) = \frac{\pi}{8} (e^{2\pi} - 1) - \frac{\pi^2 a^2}{2}$$

と求まる。

[3] $1 < a \leq e^\pi$ のとき

(2)より $x_0 = \log a$ であり、 L_t は、中心が同じで半径がそれぞれ $g(t)$ 、 $f(t)$ ($g(t) \geq f(t)$) の 2 つの円で囲まれた部分の図形と考えることができるから、 $V(a)$ は

$$\begin{aligned}
 V(a) &= \int_0^{x_0} S(t) dt \\
 &= \int_0^{x_0} \pi \left[\{g(t)\}^2 - \{f(t)\}^2 \right] dt \\
 &= \pi a^2 \int_0^{x_0} \sin^2 t dt - \pi \int_0^{x_0} (\sin^2 t) e^{2t} dt
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\int_0^{x_0} \sin^2 t dt = \int_0^{x_0} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{x_0} = \frac{x_0}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x_0$$

であり、また、(1)で求めた I に $b = x_0$ を適用すると、

$$\begin{aligned}
 \int_0^{x_0} (\sin^2 t) e^{2t} dt &= \int_0^{x_0} \frac{1 - \cos 2t}{2} e^{2t} dt \\
 &= \left[\frac{1}{4} e^{2t} \right]_0^{x_0} - \frac{1}{2} \int_0^{x_0} e^{2t} \cos 2t dt \\
 &= \frac{1}{4} e^{2x_0} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (e^{2x_0} \sin 2x_0 + e^{2x_0} \cos 2x_0 - 1) \\
 &= \frac{1}{4} e^{2x_0} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (e^{2x_0} \sin 2x_0 + e^{2x_0} \cos 2x_0)
 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 V(a) &= \pi a^2 \left(\frac{x_0}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x_0 \right) - \pi \left\{ \frac{1}{4} e^{2x_0} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (e^{2x_0} \sin 2x_0 + e^{2x_0} \cos 2x_0) \right\} \\
 &= \pi \left\{ a^2 \left(\frac{x_0}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x_0 \right) - e^{2x_0} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \sin 2x_0 - \frac{1}{8} \cos 2x_0 \right) + \frac{1}{8} \right\} \\
 &= \pi \left\{ a^2 \left\{ \frac{\log a}{2} - \frac{1}{4} \sin(2 \log a) \right\} - e^{2 \log a} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \sin(2 \log a) - \frac{1}{8} \cos(2 \log a) \right\} + \frac{1}{8} \right\} \\
 &= \pi \left\{ a^2 \left\{ \frac{\log a}{2} - \frac{1}{8} \sin(2 \log a) + \frac{1}{8} \cos(2 \log a) - \frac{1}{4} \right\} + \frac{1}{8} \right\}
 \end{aligned}$$

と求まる。

[4] $e^\pi < a$ のとき

(2)より $x_0 = \pi$ であり、 L_t は、中心が同じで半径がそれぞれ $g(t)$ 、 $f(t)$ ($g(t) \geq f(t)$) の 2 つの円で囲まれた部分の図形と考えることができるから、 $V(a)$ は

$$\begin{aligned}
 V(a) &= \int_0^\pi S(t) dt \\
 &= \int_0^\pi \pi \left[\{g(t)\}^2 - \{f(t)\}^2 \right] dt \\
 &= \pi a^2 \int_0^\pi \sin^2 t dt - \pi \int_0^\pi (\sin^2 t) e^{2t} dt
 \end{aligned}$$

となり[1]、[2]の結果を利用すると

$$V(a) = \frac{\pi^2 a^2}{2} - \frac{\pi}{8} (e^{2\pi} - 1)$$

と求まる。

以上[1]から[4]より、 $V(a)$ は

$$0 \leq a \leq 1 \text{ のとき } \frac{\pi}{8} (e^{2\pi} - 1) - \frac{\pi^2 a^2}{2}$$

$$1 < a \leq e^\pi \text{ のとき } \pi \left[a^2 \left\{ \frac{\log a}{2} - \frac{1}{8} \sin(2 \log a) + \frac{1}{8} \cos(2 \log a) - \frac{1}{4} \right\} + \frac{1}{8} \right]$$

$$e^\pi < a \text{ のとき } \frac{\pi^2 a^2}{2} - \frac{\pi}{8} (e^{2\pi} - 1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq a \leq 1 \text{ のとき}$$

$$V(a) = \frac{\pi}{8} (e^{2\pi} - 1) - \frac{\pi^2 a^2}{2}$$

$$1 < a \leq e^\pi \text{ のとき } V(a) = \pi \left[a^2 \left\{ \frac{\log a}{2} - \frac{1}{8} \sin(2 \log a) + \frac{1}{8} \cos(2 \log a) - \frac{1}{4} \right\} + \frac{1}{8} \right]$$

$$e^\pi < a \text{ のとき}$$

$$V(a) = \frac{\pi^2 a^2}{2} - \frac{\pi}{8} (e^{2\pi} - 1)$$

(1)

直線 ℓ 上の点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とおく。ここで、円 C_1, C_2 の中心と点 P は同一直線 ℓ 上に存在するため、実数 k を用いて、

$$\vec{p} - \vec{c_1} = k(\vec{c_2} - \vec{c_1})$$

と表すことができる。変形すると、

$$\vec{p} = (1-k)\vec{c_1} + k\vec{c_2}$$

となる。これが求めるベクトル方程式である。

$$(\text{答}) \quad \vec{p} = (1-k)\vec{c_1} + k\vec{c_2} \quad (k \text{ は実数})$$

(2)

円 C_1 の中心を点 A とおく。また、求める接線と円 C_1 との接点を、実数 s, t を用いて、 $B(s, t)$ とおく。AB と接線とは垂直であり、接線と ℓ とは平行であるので、 $AB \perp \ell$ である。ここで、 ℓ の方向ベクトルとして $\vec{c_2} - \vec{c_1} = (4, 2)$ がとれる。この方向ベクトルに垂直なベクトルとして、成分が $(1, -2)$ であるようなベクトルがある。円 C_1 の半径は 2 であるから、B の位置ベクトルは、

$$(s, t) = \vec{c_1} \pm \frac{2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}(1, -2) = (1, 2) \pm \frac{2}{\sqrt{5}}(1, -2) = \left(1 \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}, 2 \mp \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) \quad (\text{複号同順})$$

と求められ、これらが 2 つの円の両方に接する ℓ に平行な直線と円 C_1 との接点の座標に相当する。

$$(\text{答}) \quad \left(1 \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}, 2 \mp \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) \quad (\text{複号同順})$$

(3)

m は y 軸に平行ではないため、 m の方程式は、実数 u, v を用いて、 $y = ux + v \Leftrightarrow ux - y + v = 0$ と表すことができる。ここで、 m は円 C_1 と円 C_2 の両方に接するため、点と直線の距離の公式を用いて、

$$\frac{|u \cdot 1 - 1 \cdot 2 + v|}{\sqrt{u^2 + 1}} = 2, \quad \frac{|u \cdot 5 - 1 \cdot 4 + v|}{\sqrt{u^2 + 1}} = 2$$

が得られる。整理すると、

$$|u + v - 2| = 2\sqrt{u^2 + 1}, \quad |5u + v - 4| = 2\sqrt{u^2 + 1}$$

である。2 式の右辺が等しいため、

$$\begin{aligned} |u + v - 2| &= |5u + v - 4| \\ \Leftrightarrow (u + v - 2)^2 &= (5u + v - 4)^2 \\ \Leftrightarrow 6u^2 + 2uv - 9u - v + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2u - 1)\{3(u - 1) + v\} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2u - 1 = 0 \text{ または } 3(u - 1) + v &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $u = \frac{1}{2}$ のとき、得られる接線が ℓ と平行なものであるため、不適である。

したがって、 $v = -3(u - 1)$ である。 $|u + v - 2| = 2\sqrt{u^2 + 1}$ に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} |u + v - 2| &= 2\sqrt{u^2 + 1} \\ \Leftrightarrow \{u - 3(u - 1) - 2\}^2 &= 4(u^2 + 1) \\ \Leftrightarrow 4u^2 - 4u^2 + 1 &= 4u^2 + 1 \\ \Leftrightarrow u &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。以上より、

$$m: y = -\frac{3}{4}x + \frac{21}{4}$$

である。すなわち、方向ベクトルの 1 つとして $(4, -3)$ がとれる。したがって、求める方向ベクトルは、

$$(4k, -3k) \quad (k \text{ は任意の実数})$$

である。また、これを用いて、円 C_1 との交点を求めると、円 C_1 の方程式は、

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ であるため、}$$

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + \left\{\left(-\frac{3}{4}x + \frac{21}{4}\right) - 2\right\}^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 25x^2 - 110x + 121 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5x - 11)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{11}{5} \end{aligned}$$

となる。したがって、接点は $\left(\frac{11}{5}, -\frac{3}{4} \cdot \frac{11}{5} + \frac{21}{4}\right) = \left(\frac{11}{5}, \frac{18}{5}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad \text{接点} \left(\frac{11}{5}, \frac{18}{5}\right), \text{方向ベクトル} (4k, -3k) \quad (k \text{ は任意の実数})$$

(1)

 $n=100a+10b+c$ について、

$$\begin{aligned} n &= 100a + 10b + c \\ &= 3 \cdot (10a + b - 2c) + 7 \cdot (10a + b + c) \end{aligned}$$

である。ここで、 a, b, c が0から9までの整数であるので、 $7 \cdot (10a + b + c)$ は7の倍数である。したがって、3と7が互いに素であることに注意すると、

$$n \text{ が } 7 \text{ の倍数} \Leftrightarrow 3 \cdot (10a + b - 2c) \text{ が } 7 \text{ の倍数} \Leftrightarrow 10a + b - 2c \text{ が } 7 \text{ の倍数}$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)より、 $10a + b - 2c$ が7の倍数となることを考える。条件より、

$10a + b - 2c = 8a + b = 7a + (a + b)$ となる。これが7の倍数となるのは、 $a + b$ が7の倍数、つまり $a + b = 7, 14$ となるときであり、

$$\begin{aligned} (a, b) &= (0, 7), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), \\ &\quad (5, 9), (6, 1), (6, 8), (7, 0), (8, 6), (9, 5) \end{aligned}$$

の12通りである。

(答) 12通り

(3)

(1)より、 $10a + b - 2c$ が7の倍数となることを考える。条件より、

$10a + b - 2c = 11a - 2c = 7a + 2 \cdot (2a - c)$ となる。これが7の倍数となるのは、 $2a - c$ が7の倍数、つまり $2a - c = -7, 0, 7, 14$ となるときであり、

$$\begin{aligned} (a, c) &= (0, 7), (1, 2), (1, 9), (2, 4), (3, 6), (4, 1), \\ &\quad (4, 8), (5, 3), (6, 5), (7, 0), (8, 2), (8, 9), (9, 4) \end{aligned}$$

の13通りである。

(答) 13通り

(4)

(1)から(3)を考えると、 n が7の倍数かつ a, b, c が互いに異なるときに3枚のカードが7の倍数となる。ここで、 $a \neq b, a = c$ であるのは(1)より12通り、 $a = b, a \neq c$ であるのは(2)より13通りである。また、 $b = c, a \neq c$ となるとき、 $10a + b - 2c = 7a + (3a - b)$ となる。これが7の倍数となるのは、 $3a - b$ が7の倍数、つまり $3a - b = -7, 0, 7, 14, 21$ となるときであり、

$$\begin{aligned} (a, b) &= (0, 7), (1, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 9), (4, 5), \\ &\quad (5, 1), (5, 8), (6, 4), (7, 0), (8, 3), (9, 6) \end{aligned}$$

の12通りである。さらに、 $a = b = c$ となるのは、 $10a + b - 2c = 9a$ となることより、 $a = 0, 7$ の2通りである。以上より、 a, b, c どれか2つ以上の数字が重複するのは39通りある。一方、0以上999以下の7の倍数は $999 = 142 \cdot 7 + 5$ より、143個存在する。したがって、 n が7の倍数かつ a, b, c が互いに異なるのは $143 - 39 = 104$ (通り)である。ここで、3枚のカードの並べ方の総数は ${}_{10}P_3$ 通りあり、全て同様に確からしい。したがって、求める確率は

$$\frac{104}{{}_{10}P_3} = \frac{13}{90}$$

となる。

(答) $\frac{13}{90}$