

2019年度

M 3

数 学

2月25日(月) 理 学 部 (数学科)
【前 期 日 程】

9 : 30 ~ 11 : 30

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れてはいけません。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(5枚)に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出なさい。
- 4 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記しなさい。
- 6 問題 **4** の解答用紙は、数学解答用紙(その4)および(その5)の2枚です。
- 7 問題は、声を出して読んではいけません。
- 8 各問の配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 9 問題冊子は、必ず持ち帰りなさい。

1 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^3 4^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $b_n = \log_2 a_n$ とするとき、 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (2) α, β を定数とし $f(n) = \alpha n + \beta$ とする。このとき、 $b_{n+1} - f(n+1) = 3\{b_n - f(n)\}$ が成り立つように α, β を定めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(配点 25 %)

- 2** $f(x) = e^x \sin x$, $g(x) = a \sin x$ とする。ただし a は 0 以上の実数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) b を定数とし

$$I = \int_0^b e^{2x} \cos 2x dx, \quad J = \int_0^b e^{2x} \sin 2x dx$$

とおく。このとき、

$$I + J = \frac{1}{2} e^{2b} \sin 2b, \quad I - J = \frac{1}{2} (e^{2b} \cos 2b - 1)$$

が成り立つことを示し、 I と J を求めよ。

- (2) $f(x) = g(x)$ を満たす正の実数 x のうち最小のものを求めよ。

- (3) (2) で求めた実数を x_0 とする。 $0 \leq x \leq x_0$ の範囲で 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ。

(配点 25 %)

3 $\vec{c}_1 = (1, 2)$, $\vec{c}_2 = (5, 4)$ を xy 平面上の原点を始点とする位置ベクトルとし, C_1, C_2 をそれぞれベクトル方程式 $|\vec{p} - \vec{c}_1| = 2$, $|\vec{p} - \vec{c}_2| = 2$ で与えられた円とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 円 C_1 の中心と円 C_2 の中心を通る直線 ℓ のベクトル方程式を求めよ。
- (2) 円 C_1 と円 C_2 の両方に接する直線のうち ℓ と平行であるものは 2 本ある。それらの直線と C_1 との接点を求めよ。
- (3) 円 C_1 と円 C_2 の両方に接する直線のうち ℓ と平行でないものは 2 本ある。それらの直線のうち方向ベクトルが $(0, 1)$ でないものを m とする。このとき m と C_1 との接点および m の方向ベクトルを求めよ。

(配点 25 %)

4 a, b, c を 0 から 9 までの整数とし、整数 $n = 100a + 10b + c$ を考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) n が 7 の倍数であるための必要十分条件は $10a + b - 2c$ が 7 の倍数であることを示せ。
- (2) $a \neq b, a = c$ であるとき、 n が 7 の倍数となるような a と b の組は何通りあるか。
- (3) $a = b, a \neq c$ であるとき、 n が 7 の倍数となるような a と c の組は何通りあるか。
- (4) ① から ⑩ までの 10 枚のカードの中から、無作為に 3 枚を選んで並べて数を表すことにする。
例えば ⑧③① は 831 とし、①④⑨ は 49 とする。並べた数 $\overline{abc}$ が 7 の倍数である確率を求めよ。

(配点 25 %)

