

1

(1) (1-1) a^2-a+1 (1-2) $\theta=120^\circ$ (2) $a=-1$

(3) $a=2, f(x)=2x-4$ (4) $a=1, b=\frac{2\pi}{3}$ (5) -7

【解説】

(1)

(1-1)

各辺の長さは正であるので

$$2a-1>0 \Leftrightarrow a>\frac{1}{2}$$
$$a^2-2a>0$$
$$\Leftrightarrow a(a-2)>0$$
$$\Leftrightarrow a<0, 2<a$$
$$a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

となる。これらをまとめると

$$2<a \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。 a が $\textcircled{1}$ の範囲を動くとき

$$(a^2-a+1)-(2a-1)=a^2-3a+2$$
$$=(a-2)(a-1)$$
$$>0$$
$$\therefore a^2-a+1>2a-1$$
$$(a^2-a+1)-(a^2-2a)=a+1$$
$$>0$$
$$\therefore a^2-a+1>a^2-2a$$

となる。よって3辺の長さのうち最大のものは a^2-a+1 である。

(1-2)

最大角は長さが a^2-a+1 である辺に対する対角である。その大きさを θ とすると、余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{(a^2-2a)^2+(2a-1)^2-(a^2-a+1)^2}{2\cdot(a^2-2a)\cdot(2a-1)}$$
$$=\frac{-2a^3+5a^2-2a}{2a(a-2)(2a-1)}$$
$$=\frac{-a(a-2)(2a-1)}{2a(a-2)(2a-1)}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

となる。したがって

$$\theta=120^\circ$$

となる。

(2)

与えられた方程式を a について整理すると

$$ax(x+1)+(x+1)(x^2-x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\{x^2+(a-1)x+1\}=0$$

となる。したがってこれが2重解を持つための必要条件は

$$x^2+(a-1)x+1=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とすると

「 $\textcircled{1}$ が重解を持つ」または「 $\textcircled{1}$ が $x=-1$ を解に持つ」

である。いずれが成り立つかで場合分けして考える。

[1] $\textcircled{1}$ が $x=-1$ を解に持つとき

$\textcircled{1}$ に $x=-1$ を代入すると

$$1-(a-1)+1=0$$

$$\therefore a=3$$

となる。このとき与えられた方程式は

$$x^3+3x^2+3x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3=0$$

となり3重解を持つので、 $a=3$ は不適である。

[2] $\textcircled{1}$ が重解を持つとき

このとき $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると

$$D=(a-1)^2-4$$

$$=a^2-2a-3$$

$$=(a-3)(a+1)$$

となる。したがって $\textcircled{1}$ が重解を持つのは

$$a=-1, 3$$

のときである。[1]より $a=3$ は不適であるので $a=-1$ となる場合を考える。 $a=-1$ のとき

与えられた方程式は

$$x^3-x^2-x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2=0$$

となり2重解を持つ。よって $a=-1$ は条件を満たす。

以上[1], [2]より求める a の値は $a=-1$ である。

(3)

等式

$$\int_a^{2-x} f(t)dt=x^2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の両辺を x で微分すると

$$-f(2-x)=2x$$

$$\Leftrightarrow f(2-x)=2(2-x)-4$$

$$\therefore f(x)=2x-4$$

となる。 $f(x)=2x-4$ のとき

$$\int_a^{2-x} f(t)dt=\int_a^{2-x} (2t-4)dt$$
$$=\left[t^2-4t\right]_a^{2-x}$$
$$=(2-x)^2-4(2-x)-a^2+4a$$
$$=x^2-a^2+4a-4$$

となるので $\textcircled{1}$ より

$$-a^2+4a-4=0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2=0$$

$$\therefore a=2$$

となる。

(4)

x の範囲によって場合分けして考える。

[1] $|x|<1$ のとき

このとき

$$f(x)=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1+ax+2\cos bx+x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$$
$$=1+ax+2\cos bx$$

となる。

[2] $|x|>1$ のとき

このとき

$$f(x)=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1+ax+2\cos bx+x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$$
$$=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{x^{-2n}+ax^{-2n+1}+2x^{-2n}\cos bx+x}{x^{-2n}+1}$$
$$=x$$

となる。

[3] $x=1$ のとき

このとき

$$f(x)=\frac{1}{2}(2+a+2\cos b)$$

[4] $x=-1$ のとき

このとき

$$f(x)=\frac{1}{2}(-a+2\cos b)$$

となる。

以上[1], [2], [3], [4]より

$$f(x)=\begin{cases} 1+ax+2\cos bx & (|x|<1 \text{のとき}) \\ x & (|x|>1 \text{のとき}) \\ \frac{1}{2}(2+a+2\cos b) & (x=1 \text{のとき}) \\ \frac{1}{2}(-a+2\cos b) & (x=-1 \text{のとき}) \end{cases}$$

となる。したがってこれより $x\neq\pm 1$ において $f(x)$ は連続であることが分かる。ここで

$$\lim_{x\rightarrow 1+0} f(x)=1$$
$$\lim_{x\rightarrow 1-0} f(x)=1+a+2\cos b$$
$$f(1)=\frac{1}{2}(2+a+2\cos b)$$

であり $f(x)$ が $x=1$ で連続であることよりこれらが等しいので

$$a+2\cos b=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。同様に

$$\lim_{x\rightarrow -1+0} f(x)=1-a+2\cos b$$
$$\lim_{x\rightarrow -1-0} f(x)=-1$$
$$f(-1)=\frac{1}{2}(-a+2\cos b)$$

であり $f(x)$ が $x=-1$ で連続であることよりこれらが等しいので

$$a-2\cos b=2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より

$$a=1, \cos b=-\frac{1}{2}$$

となる。これを満たす。最小の正の数 b は

$$b=\frac{2\pi}{3}$$

である。

(5)

$t=-\frac{7}{x}$ と置く。このとき極限をとる関数は

$$\frac{\log\left(1-\frac{7}{x}\right)}{\sin\frac{1}{x}}=\frac{\log(1+t)}{\sin\left(-\frac{t}{7}\right)}$$
$$=-\frac{\log(t+1)}{t}\cdot\frac{\left(-\frac{t}{7}\right)}{\sin\left(-\frac{t}{7}\right)}\cdot 7$$

となる。ここで $x\rightarrow\infty$ のとき $t\rightarrow-0$ であり

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x}{\sin x}=1$$
$$\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{\log(x+1)}{x}=1$$

であるので、求める極限値は

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{\log\left(1-\frac{7}{x}\right)}{\sin\frac{1}{x}}=\lim_{t\rightarrow-0}-\frac{\log(t+1)}{t}\cdot\frac{\left(-\frac{t}{7}\right)}{\sin\left(-\frac{t}{7}\right)}\cdot 7$$
$$=-7$$

となる。

(1)

条件(ii)の両辺を0から x の範囲で積分すると、 $a_n = f_n(0)$ より

$$\begin{aligned}\int_0^x f'_n(t) dt &= \int_0^x n f_{n-1}(t) dt \\ \Leftrightarrow [f_n(t)]_0^x &= n \int_0^x f_{n-1}(t) dt \\ \Leftrightarrow f_n(x) &= n \int_0^x f_{n-1}(t) dt + f_n(0) \\ \Leftrightarrow f_n(x) &= n \int_0^x f_{n-1}(t) dt + a_n\end{aligned}$$

となる。よって題意の式が示された。

(証明終)

(2)

数学的帰納法を用いて等式

$$f_n(x) = {}_nC_0 \cdot x^n + {}_nC_1 \cdot a_1 x^{n-1} + \cdots + {}_nC_{n-1} \cdot a_{n-1} x + {}_nC_n \cdot a_n \cdots \textcircled{1}$$

を示す。

[1] $n=1$ のとき

このとき(1)の結果と条件(i)を用いると

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 1 \cdot \int_0^x f_0(t) dt + a_1 \\ &= x + a_1 \\ &= {}_1C_0 \cdot x^1 + {}_1C_1 \cdot a_1\end{aligned}$$

となる。よって $n=1$ のとき①は成立する。

[2] $n=k$ で①が成り立つと仮定した場合

このとき帰納法の過程より

$$f_k(x) = {}_kC_0 \cdot x^k + {}_kC_1 \cdot a_1 x^{k-1} + \cdots + {}_kC_{k-1} \cdot a_{k-1} x + {}_kC_k \cdot a_k$$

である。よって(1)の結果より

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x) &= (k+1) \int_0^x f_k(t) dt + a_{k+1} \\ &= (k+1) \int_0^x \left(\sum_{\ell=0}^k {}_kC_{\ell} a_{\ell} t^{k-\ell} \right) dt + a_{k+1} \\ &= (k+1) \left[\sum_{\ell=0}^k \frac{1}{k-\ell+1} {}_kC_{\ell} a_{\ell} t^{k-\ell+1} \right]_0^x + a_{k+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^k \frac{k+1}{k-\ell+1} {}_kC_{\ell} a_{\ell} x^{k-\ell+1} + a_{k+1}\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}\frac{k+1}{k-\ell+1} {}_kC_{\ell} &= \frac{k+1}{k-\ell+1} \cdot \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} \\ &= \frac{(k+1)!}{\ell!(k-\ell+1)!} \\ &= {}_{k+1}C_{\ell}\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x) &= \sum_{\ell=0}^k {}_{k+1}C_{\ell} a_{\ell} x^{k-\ell+1} + a_{k+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{k+1} {}_{k+1}C_{\ell} a_{\ell} x^{k-\ell+1}\end{aligned}$$

となる。したがって①は $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上[1], [2]より $n=1, 2, 3, \dots$ に対して等式

$$f_n(x) = {}_nC_0 x^n + {}_nC_1 a_1 x^{n-1} + \cdots + {}_nC_{n-1} a_{n-1} x + {}_nC_n a_n$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

条件(ii)と条件(iii)を用いると

$$\begin{aligned}n \int_0^1 x f_{n-1}(x) dx &= \int_0^1 x f'_n(x) dx \\ &= [x f_n(x)]_0^1 - \int_0^1 f_n(x) dx \\ &= f_n(1)\end{aligned}$$

となる。(1)の結果において $x=1$ とすると、条件(iii)より

$$\begin{aligned}f_n(1) &= \int_0^1 f_{n-1}(t) dt + a_n \\ &= a_n\end{aligned}$$

となる。したがって

$$n \int_0^1 x f_{n-1}(x) dx = a_n$$

となる。

(証明終)

$$(1) \sqrt{a^2+b^2}+c < r \quad (2) \left(\frac{ra|b|}{b\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{r|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) (b \neq 0) \\ (\pm r, 0) (b = 0)$$

(3) 円 B が原点を通る場合

$$(4) \frac{\sqrt{10}}{10}r \leq x \leq \frac{3\sqrt{10}}{10}r \quad (5) \text{ 図形 } A' \text{ の方程式: } \frac{x^2}{4} + y^2 = r^2 \quad (6) \quad c = \frac{3\sqrt{10}}{10}r \\ \text{法線 } l' \text{ の方程式: } x_1y = 4y_1x - 3y_1x_1$$

【解説】

(1) 2 円 A, B の中心間距離を d とすると

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

であり, 2 円 A, B の半径はそれぞれ r, c であるので, 円 B が A と共有点を持つことなく円 A の内部に存在するための条件は

$$d < r - c \\ \therefore \sqrt{a^2 + b^2} + c < r$$

である。

(2) 円 A の点 P における法線は, 円 A の中心である原点を通る。よって点 P の座標を $P(p, q)$

($q \geq 0$) とおくと, この法線の方程式は

$$py = qx$$

である。点 (a, b) はこの方程式上にあることから,

$$pb = qa \quad \dots \textcircled{1}$$

であり, また (p, q) が円 $x^2 + y^2 = r^2$ にあることから

$$p^2 + q^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。以下, b の値で場合分けをする。

[1] $b = 0$ のとき,

このとき, $a \neq 0$ と $\textcircled{1}$ より $q = 0$ であるから, $\textcircled{2}$ より

$$p = \pm r \\ q = 0$$

である。

[2] $b \neq 0$ のとき

このとき, $\textcircled{1}$ より

$$p = \frac{a}{b}q$$

であるから, $\textcircled{2}$ より

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)q^2 = r^2 \\ \Leftrightarrow q = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}r \quad (\because a^2 + b^2 \neq 0)$$

となるので,

$$p = \frac{|b|ar}{b\sqrt{a^2 + b^2}} \\ q = \frac{|b|r}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となる。

(3)

円 A の法線 l は原点を通る直線である。したがって, 円 B に接する法線 l の本数は, 原点を通り円 B に接する直線の本数に等しい。原点を通る円 B の接線の本数は原点と円 B の位置関係に注目すると,

$$\begin{array}{ll} \text{原点が円 } B \text{ の内部にあるとき:} & 0 \text{ 本} \\ \text{原点が円 } B \text{ 上にあるとき:} & 1 \text{ 本} \\ \text{原点が円 } B \text{ の外部にあるとき:} & 2 \text{ 本} \end{array}$$

であるから, 円 B に接するような法線 l がただ 1 本だけ存在するのは, 円 B が原点を通る場合である。

(4)

このとき円 B の方程式は

$$(x - \sqrt{10})^2 + (y - \sqrt{10})^2 = 4$$

である。ここで点 $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$ と置く。ただし $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。このとき法線 l の方程式は

$$y = (\tan \theta)x$$

である。よって円 B , 直線 l の方程式から y を消去すると

$$(x - \sqrt{10})^2 + (x \tan \theta - \sqrt{10})^2 = 4 \\ \Leftrightarrow (1 + \tan^2 \theta)x^2 - 2\sqrt{10}(1 + \tan \theta)x + 16 = 0$$

となる。このとき円 B , 直線 l が共有点を持つための条件は, この方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 10(1 + \tan \theta)^2 - 16(1 + \tan^2 \theta) \\ = -6 \tan^2 \theta + 20 \tan \theta - 6 \\ \therefore 3 \tan^2 \theta - 10 \tan \theta + 3 \leq 0$$

となる。これを解くと

$$3 \tan^2 \theta - 10 \tan \theta + 3 \leq 0 \\ \Leftrightarrow (3 \tan \theta - 1)(\tan \theta - 3) \leq 0 \\ \therefore \frac{1}{3} \leq \tan \theta \leq 3$$

となる。 $0 \leq \theta \leq \pi$ と $\tan \theta > 0$ より $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。ここで $\tan \theta = \frac{1}{3}$ のとき

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta}} \\ = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} \\ = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

であり, $\tan \theta = 3$ のとき

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta}} \\ = \sqrt{\frac{1}{1 + 9}} \\ = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

である。したがって点 P の x 座標が $r \cos \theta$ であることより

$$\frac{\sqrt{10}}{10}r \leq x \leq \frac{3\sqrt{10}}{10}r$$

となる。

(5)

円 A 上の点 (x, y) に対応する, 図形 A' 上の点を (X, y) とする。このとき

$$X = 2x \Leftrightarrow x = \frac{X}{2}$$

である。したがってこれを円 A の方程式に代入すると

$$\frac{X^2}{4} + y^2 = r^2$$

となる。したがって図形 A' の方程式は

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = r^2$$

となる。

点 $P(x_1, y_1)$ における図形 A' の接線の方程式は

$$\frac{x_1}{4}x + y_1y = r^2$$

となる。したがってこの点における法線の方程式は $x_1 \neq 0$ のとき

$$y = \frac{4y_1}{x_1}(x - x_1) + y_1 \\ \Leftrightarrow y = \frac{4y_1}{x_1}x - 3y_1 \\ \therefore x_1y = 4y_1x - 3y_1x_1$$

となる。これは $x_1 = 0$ のときも成立する。

(6)

点 $\left(\sqrt{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$ における図形 A' の法線の方程式は

$$\sqrt{2}ry = 2\sqrt{2}rx - 3r^2$$

である。したがってこの直線と原点との距離は

$$\frac{|3r^2|}{\sqrt{(\sqrt{2}r)^2 + (2\sqrt{2}r)^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}r$$

となる。したがって円 B とこの直線が接することより $c = \frac{3\sqrt{10}}{10}r$ となる。

$$(1) \quad 24 \quad (2) \quad (2-1) \quad \frac{1}{6}$$

(2-2) (2-1)でもとめた事象Ⅱが起こったときの事象Ⅰが起こる確率と、事象Ⅰが起こる確率が等しくないので事象Ⅰと事象Ⅱは独立ではない

$$(3) \quad 5040 \quad (4) \quad \text{並べ方の総数: } 648 \text{ 通り} \quad \text{確率: } \frac{9}{70}$$

【解説】

(1)

並べ方の総数は、4つの中から3つを選び出しそれを1列に並べる並べ方の総数であるので

$${}_4P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ = 24$$

より24通りである。

(2)

(2-1)

札Tが3枚の中に含まれるので、「札Aが札Cの左にある」という条件を満たすような札の並べ方は(A, C, T), (T, A, C), (A, T, C)のみである。また札Tを含むような札の並べ方は

$${}_3C_2 \cdot 3! = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ = 18$$

となるので18通りである。したがって求める確率は

$$\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

となる。

(2-2)

札Aが札Cの左にある確率はAとC以外の札がTである場合とGである場合に分けて考えると(1), (2-1)より

$$\frac{3}{24} + \frac{3}{24} = \frac{1}{4}$$

となる。したがって

$$(\text{事象Ⅰの確率}) \neq (\text{事象Ⅱの下で事象Ⅰが起こる確率})$$

となるので事象Ⅰと事象Ⅱは独立ではない。

(3)

異なるカードの組が3枚, 3枚, 2枚, 1枚であるので、並べ方の総数は

$$\frac{9!}{3!3!2!} = 5040 \text{ 通り}$$

となる。

(4)

このとき3枚の札の組として許されるのは、(A, G, C), (A, G, C), (A, G, T)である。この組の

並べ方が $\frac{3!}{2!} = 3$ 通りであり、各組の並べ方が $(3!)^3 = 216$ 通りである。よって並べ方の総数は

$$3 \times 216 = 648 \text{ 通り}$$

である。よってそのような並べ方になる確率は

$$\frac{648}{5040} = \frac{9}{70}$$

となる。