

平成 20 年度入学試験問題
(I 期)

数 学

注 意 事 項

1. 解答は解答用紙の所定の欄に記入せよ。
2. この問題用紙および下書き用紙は解答用紙と共に机上に残すこと。

(その 1)

1

次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

- (1) ある実数 a により 3 辺の長さがそれぞれ $2a - 1$, $a^2 - 2a$, $a^2 - a + 1$ と表される三角形がある。

(1-1) この 3 辺の長さのうち最大のものを求めよ。

(1-2) この三角形の 3 つの内角のうち最大の角の大きさを求めよ。

- (2) 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$ が 2 重解をもつような定数 a の値を求めよ。

なお、3 重解は 2 重解とはみなさないものとする。

- (3) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_a^{2-x} f(t) dt = x^2$$

- (4) 次の関数 $f(x)$ がすべての実数で連続となるように定数 a , b を定めよ。ただし、 b については、とりうる値のうち正の数で最小のものを求めよ。

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + ax + 2 \cos bx + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$$

- (5) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 - \frac{7}{x}\right)}{\sin \frac{1}{x}}$ を求めよ。

2 多項式の列 $f_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) があり, 次の関係式 (i), (ii) を満たしているとする。また, $a_n = f_n(0)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおく。とくに $a_0 = 1$ である。以下の各問に答えよ。

$$(i) \quad f_0(x) = 1,$$

$$(ii) \quad f'_n(x) = n f_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $f_n(x) = n \int_0^x f_{n-1}(t) dt + a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ について, 等式

$$f_n(x) = {}_nC_0 x^n + {}_nC_1 a_1 x^{n-1} + \dots + {}_nC_{n-1} a_{n-1} x + {}_nC_n a_n$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ。

(3) 多項式の列 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は上の関係式 (i), (ii) の他に, 次の関係式 (iii) も満たしているとする。

$$(iii) \quad \int_0^1 f_n(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき

$$a_n = n \int_0^1 x f_{n-1}(x) dx \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

が成り立つことを証明せよ。

数 学

注 意 事 項

1. 解答は解答用紙の所定の欄に記入せよ。
2. この問題用紙および下書き用紙は解答用紙と共に机上に残すこと。

(その2)

3 xy 平面上に2つの円 A , B がある。 A は方程式 $x^2 + y^2 = r^2$ (ただし, r は正の定数) で表されるものとする。 B は, 中心の座標が (a, b) , 半径が c (c は正の定数) であり, A と共有点をもつことなく, A の内部に含まれているものとする。次に, 円 A 上の $y \geq 0$ を満たす部分から任意に点を取り, それを P とする。また円 A の P における法線を l とする。以下の問 (1) ~ (4) に答えよ。ただし, 答は結果のみを解答欄に記入せよ。

- (1) a , b , c , r が満たすべき条件を不等式で表せ。
- (2) 法線 l が円 B の中心を通るとき, 点 P の座標を a , b , r を用いて表せ。ただし, $(a, b) \neq (0, 0)$ とする。
- (3) 円 B に接するような法線 l がただ1本だけ存在するのは, B がどのような条件を満たす場合か。
- (4) $a = b = \sqrt{10}$, $c = 2$ とする。このとき, 円 B と法線 l が共有点をもつような点 P の x 座標の範囲を求めよ。

次に, 円 A を構成する各点の x 座標を2倍にした点全体で構成される図形を A' とする。 A の場合と同様に, A' 上の $y \geq 0$ を満たす部分からとった任意の点を P' , 図形 A' の P' における法線を l' とする。以下の問 (5), (6) に答えよ。ただし, 答は結果のみを解答欄に記入せよ。

- (5) 図形 A' を表す方程式を書け。また, 点 P' の座標を (x_1, y_1) とするとき, 法線 l' の方程式を書け。
- (6) 円 B の中心が $(0, 0)$ にあり, 点 $P'(\sqrt{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r)$ における A' の法線 l' が B と接しているとする。このとき, B の半径 c の値を求めよ。

4

文字 A, C, G, T のいずれか 1 つだけが書かれた 4 種類の札が何枚かある。いまその中から何枚かの札を取り出して、左から順に一行に並べることを考える。

4 種類の札がそれぞれ 1 枚ずつあるとし、これから 3 枚を取り出して並べるとする。次の問 (1), (2) に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 全部で何通りの並べ方があるか。その総数を求めよ。

(2) 「札 A が札 C の左にある」という事象を I, 「札 T が並びの中に含まれる」という事象を II で表す。

(2-1) 事象 II が起こったときの事象 I が起こる条件つき確率を求めよ。

(2-2) 事象 I と事象 II は独立か否か。理由を述べて答えよ。

次に、札 A と札 G が 3 枚ずつ、札 C が 2 枚、札 T が 1 枚の合計 9 枚の札があるとし、この 9 枚を全部並べるとする。次の問 (3), (4) に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(3) 全部で何通りの並べ方があるか。その総数を求めよ。

(4) 並べた 9 枚の札を、左から 1~3 番目、4~6 番目、7~9 番目の 3 箇所区切る。この 3 箇所の各 3 枚の並べ方がいずれも (1) で現れる並べ方のどれかに該当するような 9 枚の並べ方は全部で何通りあるか。その総数を求めよ。また、そのような 9 枚の並べ方が現れる確率を求めよ。