

[1]
(1)

(1-1)

$n=1, 2, \dots$ として、分母が 2^n となる群を第 n 群と呼ぶことにする。第 n 群の中で、始めから m 番目($m=1, 2, \dots$)の項の分子は、 $2m-1$ と表せる。また、第 n 群の項数は、 2^{n-1} 個なので、第 n 群の1番目の項は、

$$1+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}+1=2^{n-1}$$

より、第 2^{n-1} 項であり、最後の項は、第 (2^n-1) 項となる。よって、第100項は、

$$2^{n-1}\leq 100\leq 2^n-1$$
$$\therefore n=7$$

より、第7群に属し、分母は $2^7=128$ となる。また、第7群の始めの項は、 $2^6=64$ 項目であり、第100項は、第7群の中で37番目の項となる。よって、分子は、 $2\cdot 37-1=73$ となる。

(答) $\frac{73}{128}$

(1-2)

$n\geq 2$ のとき、第 n 群の総和は、

$$\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\cdot\{1+(2\cdot 2^{n-1}-1)\}=2^{n-2}$$

となる。よって、この数列の初項から第100項までの和は、

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^62^{k-2}+\frac{1}{128}\cdot\frac{1}{2}\cdot 37\cdot(1+73)=\frac{1}{2}+31+\frac{1369}{128}$$
$$=\frac{5401}{128}$$

となる。

(答) $\frac{5401}{128}$

(2)

三角関数の合成を用いて、

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2\sqrt{3}\cos x=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)-2\sqrt{3}\cos x$$
$$=\sin x-\sqrt{3}\cos x$$
$$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

となる。よって、与式は、

$$0\leq 2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq 1$$

と変形することができる。 $0\leq x<2\pi$ より、 $-\frac{\pi}{3}\leq x-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$ なので、

$$0\leq 2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq 1$$
$$\Leftrightarrow 0\leq x-\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{6},\quad\frac{5\pi}{6}\leq x-\frac{\pi}{3}\leq\pi$$
$$\therefore\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{\pi}{2},\quad\frac{7\pi}{6}\leq x\leq\frac{4\pi}{3}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{\pi}{2},\quad\frac{7\pi}{6}\leq x\leq\frac{4\pi}{3}$

(3)

まず、真数条件より、 $1< x < 4$ であり、底の条件より、 $a\neq 1$ かつ $a>0$ である。与式を変形すると、

$$\log_a(x-1)+\log_a(4-x)=-2$$
$$\Leftrightarrow\log_a(x-1)(4-x)=\log_a a^{-2}$$
$$\Leftrightarrow(x-1)(4-x)=\frac{1}{a^2}$$
$$\therefore x^2-5x+4+\frac{1}{a^2}=0$$

となる。 $f(x)=x^2-5x+4+\frac{1}{a^2}=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{a^2}-\frac{9}{4}$ として、 $1< x < 4$ の範囲で、与式が解をもつ条件を求める。ここで、 $f(1)=f(4)=\frac{1}{a^2}>0$ より、 $\frac{1}{a^2}-\frac{9}{4}\leq 0$ となればよい。よって、

$$\frac{1}{a^2}-\frac{9}{4}\leq 0$$
$$\therefore a\leq -\frac{2}{3},\frac{2}{3}\leq a$$

となり、底の条件とあわせると、 $\frac{2}{3}\leq a<1, 1<a$ となる。

(答) $\frac{2}{3}\leq a<1, 1<a$

(4)

与式を変形して、

$$x\sqrt{x-m}\sqrt{x}+1=0$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{x}(x-m)=-1$$
$$\Leftrightarrow x(x-m)^2=1$$
$$\Leftrightarrow x^3-2mx^2+m^2x-1=0$$

となる。ここで、 $\sqrt{x}(x-m)=-1$ より、 x の範囲について、 $0< x < m$ が成り立つ。

$$f(x)=x^3-2mx^2+m^2x-1$$

とおくと、

$$f'(x)=3x^2-4mx+m^2$$
$$=(3x-m)(x-m)$$

となる。よって、 $f(x)$ についての増減表は、次のようになる。

x	0	...	$\frac{m}{3}$	...	m
$f'(x)$	+	+	0	-	0
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$f\left(\frac{m}{3}\right)$	$\searrow$	-1

よって、上の増減表より、与式が、相異なる2つの実数解をもつためには、 $f\left(\frac{m}{3}\right)>0$ となればよい。

$$f\left(\frac{m}{3}\right)=\frac{m^3}{27}-\frac{2}{9}m^3+\frac{m^3}{3}-1$$
$$=\frac{4}{27}m^3-1$$
$$=\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}m-1\right)\left(\frac{2^3\sqrt{2}}{9}m^2+\frac{\sqrt[3]{4}}{3}m+1\right)$$
$$>0$$

となり、 $\frac{2^3\sqrt{2}}{9}m^2+\frac{\sqrt[3]{4}}{3}m+1$ の判別式 D について、 $D<0$ となることから、

$\frac{2^3\sqrt{2}}{9}m^2+\frac{\sqrt[3]{4}}{3}m+1$ は常に正である。よって、

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}m-1>0$$
$$\therefore m>\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

となる。

(答) $m>\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

(5)

与式の両辺の自然対数をとると、

$$\log a_n=\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+2\cdot\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+2\cdot\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+2\cdot\frac{n}{n}\right)\right\}\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

となる。ここで、

$$f(x)=\log(1+2x)$$

とすると、①は、

$$\log a_n=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$$

と表せる。よって、区分求積法より、

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\log a_n=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$$
$$=\int_0^1\log(1+2x)dx$$
$$=\frac{1}{2}(3\log 3-2)$$

となる。ここで、

$$\frac{1}{2}(3\log 3-2)=\frac{1}{2}\log\frac{27}{e^2}$$
$$=\log\frac{3\sqrt{3}}{e}$$

より、

$$\lim_{n\rightarrow\infty}a_n=\frac{3\sqrt{3}}{e}$$

である。

(答) $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n=\frac{3\sqrt{3}}{e}$

[2]

(1)

接線 l は、接線の公式を用いて、

$$\begin{aligned} y - (-t^2 + 1) &= (-2t)(x - t) \\ \therefore 2tx + y - (t^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

となる。点 $(a, 0)$ から、接線 l までの距離は、点と直線の公式より、

$$d = \frac{|-t^2 + 2at - 1|}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

となる。ここで、

$$-t^2 + 2at - 1 = -(t - a)^2 + a^2 - 1$$

であり、 $0 \leq a \leq 1$ より、 $a^2 - 1 \leq 0$ となるので、 $-t^2 + 2at - 1$ は常に負である。よって、

$$d = \frac{t^2 - 2at + 1}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad d = \frac{t^2 - 2at + 1}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

(2)

$$d = f(t) = \frac{t^2 - 2at + 1}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

より、

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(2t - 2a)\sqrt{4t^2 + 1} - (t^2 - 2at + 1) \cdot \frac{4t}{\sqrt{4t^2 + 1}}}{4t^2 + 1} \\ &= \frac{(2t - 2a)(4t^2 + 1) - (t^2 - 2at + 1) \cdot 4t}{(4t^2 + 1)\sqrt{4t^2 + 1}} \\ &= \frac{2}{(4t^2 + 1)\sqrt{4t^2 + 1}}(2t^3 - t - a) \end{aligned}$$

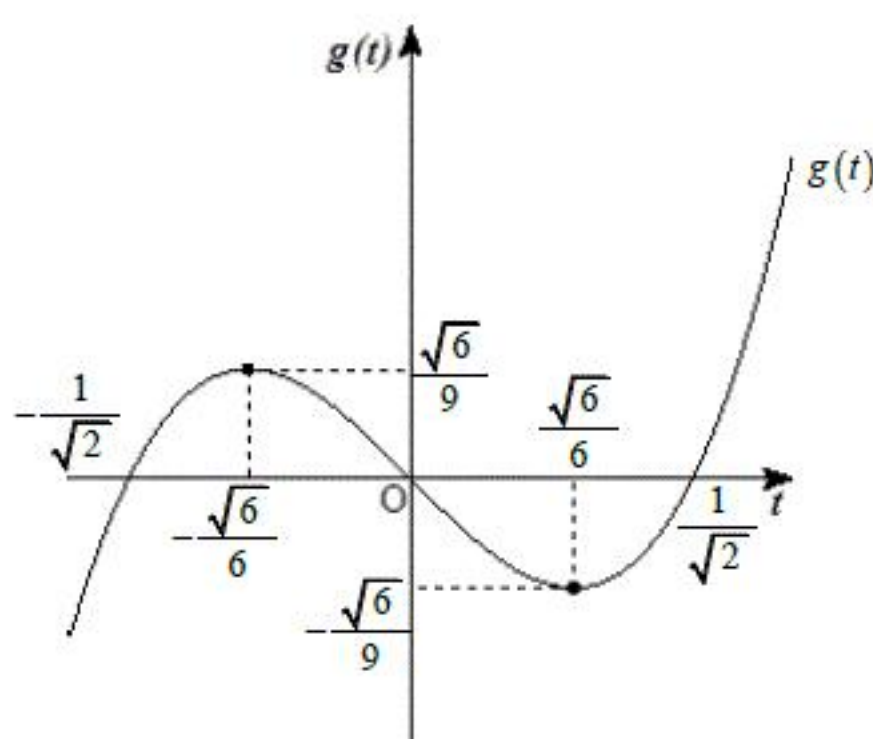
となる。

$$(\text{答}) \quad f'(t) = \frac{2}{(4t^2 + 1)\sqrt{4t^2 + 1}}(2t^3 - t - a)$$

(3)

$$g(t) = 2t^3 - t = t(\sqrt{2}t - 1)(\sqrt{2}t + 1)$$

とおく。 $g(t)$ のグラフは次のようになる。



ここで、 $g(t) = a$ となるときに、 $f'(t) = 0$ となり、 a は、 $0 \leq a \leq 1$ の範囲を動くことから、次の3通りが考えられる。

[1] $0 \leq a < \frac{\sqrt{6}}{9}$ のとき

このとき、 $g(t) = a$ は、3つの解をもち、小さい方から順番に α, β, γ とすると、 $f(t)$ について増減表は、次のようになる。

t	...	α	...	β	...	γ	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、このとき、極大1つと極小2つをもつ。

[2] $a = \frac{\sqrt{6}}{9}$ のとき

このとき、 $g(t) = a$ は、2つの解をもち、小さい方から順番に α, β とすると、 $f(t)$ について増減表は、次のようになる。

t	...	α	...	β	...
$f'(t)$	-	0	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、このとき、極小1つをもつ。

[3] $\frac{\sqrt{6}}{9} < a \leq 1$ のとき

このとき、 $g(t) = a$ は、1つの解をもち、 α とすると、 $f(t)$ について増減表は、次のようになる。

t	...	α	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、このとき、極小1つをもつ。

したがって、[1], [2], [3]より、 $f(t)$ が極大になる t の個数と、極小になる t の個数は、

$0 \leq a < \frac{\sqrt{6}}{9}$ のとき、極大1個、極小2個、 $\frac{\sqrt{6}}{9} \leq a \leq 1$ のとき、極大0個、極小1個となる。

(答)

$$(\text{極大, 極小}) = \begin{cases} (1, 2) & (0 \leq a < \frac{\sqrt{6}}{9}) \\ (0, 1) & (\frac{\sqrt{6}}{9} \leq a \leq 1) \end{cases}$$

[3]

(1)

$$2 < \sqrt{7} < 3$$

$$\Leftrightarrow 14 < \sqrt{7} + 12 < 15$$

より,

$$x = 14$$

$$y = \sqrt{7} + 12 - 14 = \sqrt{7} - 2$$

となる。よって,

$$x - \frac{3}{y} = 14 - \frac{3}{\sqrt{7} - 2} = 12 - \sqrt{7}$$

となる。したがって,

$$2 < \sqrt{7} < 3$$

$$\Leftrightarrow -3 < -\sqrt{7} < -2$$

$$\therefore 9 < 12 - \sqrt{7} < 10$$

より, 整数部分は9である。

(答) 9

(2)

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$\Leftrightarrow 72^n = 2^{3n} \cdot 3^{2n}$$

となることから, 正の約数の個数について,

$$(3n+1)(2n+1) = 13n+111$$

が成り立つ。これを解いて,

$$(3n+11)(n-5) = 0$$

$$\therefore n = 5, -\frac{11}{3}$$

となるので, 自然数 $n = 5$ である。

(答) 5

(3)

(3-1)

1 辺 $2r$ の正三角錐となる。よって, 高さ $\frac{2\sqrt{6}}{3}r$ となるので, 体積は,

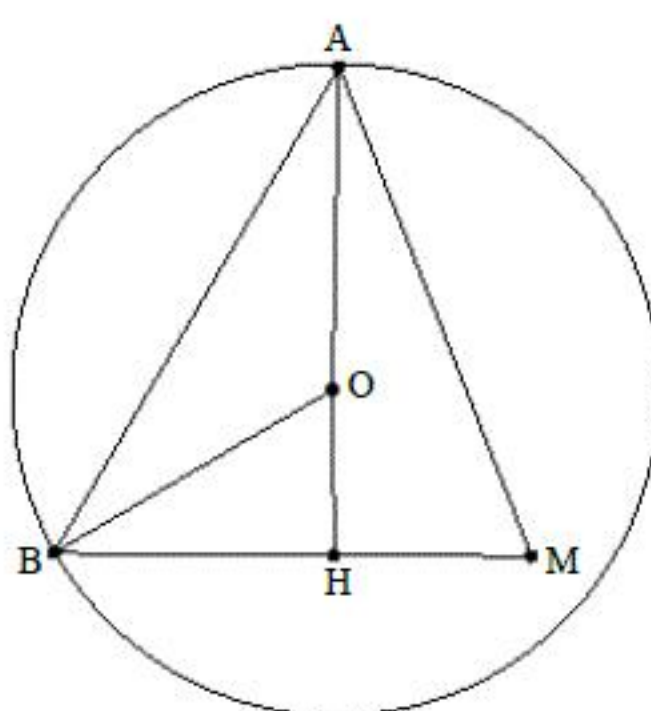
$$\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sqrt{3}r \times \frac{2\sqrt{6}}{3}r \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}r^3$$

である。

$$(答) \frac{2\sqrt{2}}{3}r^3$$

(3-2)

4 個の小球が内接する球の半径は, (3-1)で求めた正三角錐の外接球の半径に, 小球の半径を加えたものに等しい。(3-1)で求めた正三角錐は, 1 辺が $2r$ である。よって, 正三角錐を2つの頂点と1辺の中点を通る平面で切断した切り口は, 下の図のようになる。



ここで, 2つの頂点をAとB, 1 辺の中点をM, 外接球の中心をO, 頂点Aから辺BMに垂直に下ろした垂線の足をHとする。また, 外接球の半径を R とすると,

$$OH = AH - OA = \frac{2\sqrt{6}}{3}r - R \quad \dots \textcircled{1}$$

$$OH^2 = OB^2 - BH^2 = R^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。よって, ①, ②より,

$$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}r - R\right)^2 = R^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{6}}{2}r$$

となる。よって, 求める球の半径は,

$$R + r = \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)r$$

である。

$$(答) \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)r$$

(4)

(4-1)

内分の公式より,

$$\vec{p} = \frac{n}{m+n}\vec{b} + \frac{m}{m+n}\vec{c}$$

となる。

$$(答) \vec{p} = \frac{n}{m+n}\vec{b} + \frac{m}{m+n}\vec{c}$$

(4-2)

同様にして, 点Qと点Rの位置ベクトルは,

$$\vec{q} = \frac{n}{m+n}\vec{c} + \frac{m}{m+n}\vec{a}, \vec{r} = \frac{n}{m+n}\vec{a} + \frac{m}{m+n}\vec{b}$$

となる。よって, 重心Gの位置ベクトルは,

$$\vec{g} = \frac{\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{n}{m+n}\vec{b} + \frac{m}{m+n}\vec{c} \right) + \left(\frac{n}{m+n}\vec{c} + \frac{m}{m+n}\vec{a} \right) + \left(\frac{n}{m+n}\vec{a} + \frac{m}{m+n}\vec{b} \right) \right\}$$

$$= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

となる。

$$(答) \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

[4]

(1)

それぞれの水門が開いている事象を 1~4 とする。また、池 C に水が流れ込む確率を、 $P(C)$ とすると、

$$P(C)=P(1\cap 2)=p_1p_2$$

である。

(答) p_1p_2

(2)

$$P(D)=P\{(1\cap 2\cap 3)\cup(1\cap 4)\}$$

となる。よって、加法定理より、

$$\begin{aligned} P(D) &= P(1\cap 2\cap 3)+P(1\cap 4)-P(1\cap 2\cap 3\cap 4) \\ &= p_1p_2p_3+p_1p_4-p_1p_2p_3p_4 \end{aligned}$$

となる。

(答) $p_1p_2p_3+p_1p_4-p_1p_2p_3p_4$

(3)

(3-1)

池 D に水が到達していて、池 C に水が流れ込んでいる条件確率を、 $P_D(C)$ とすると、

$$P_D(C)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}$$

と表せる。ここで、

$$\begin{aligned} P(C\cap D) &= P\{(1\cap 2\cap 3)\cup(1\cap 2\cap 4)\} \\ &= P(1\cap 2\cap 3)+P(1\cap 2\cap 4)-P(1\cap 2\cap 3\cap 4) \\ &= p_1p_2p_3+p_1p_2p_4-p_1p_2p_3p_4 \end{aligned}$$

となるので、

$$P_D(C)=\frac{p_1p_2p_3+p_1p_2p_4-p_1p_2p_3p_4}{p_1p_2p_3+p_1p_4-p_1p_2p_3p_4}=\frac{p(2-p)}{1+p-p^2}$$

である。

(答) $\frac{p(2-p)}{1+p-p^2}$

(3-2)

求める確率は、 $P_{\overline{D}}(C)$ である。(3-1)と同様にして、

$$P_{\overline{D}}(C)=\frac{P(C\cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$$

と表せる。ここで、

$$\begin{aligned} P(C\cap \overline{D}) &= P(1\cap 2\cap \overline{3}\cap \overline{4}) \\ &= p_1p_2(1-p_3)(1-p_4) \end{aligned}$$

となるので、

$$P_{\overline{D}}(C)=\frac{p_1p_2(1-p_3)(1-p_4)}{1-(p_1p_2p_3+p_1p_4-p_1p_2p_3p_4)}=\frac{p^2(1-p)}{1+p-p^3}$$

である。

(答) $\frac{p^2(1-p)}{1+p-p^3}$

(4)

このときの確率は、

$$P\{(1\cap 2\cap 3\cap \overline{4})\cup(1\cap \overline{2}\cap 4)\cup(1\cap 2\cap \overline{3}\cap 4)\}$$

となる。ここで、 $P(1\cap 2\cap 3\cap \overline{4})$ 、 $P(1\cap \overline{2}\cap 4)$ 、 $P(1\cap 2\cap \overline{3}\cap 4)$ は互いに独立な事象であるので、

$$\begin{aligned} P\{(1\cap 2\cap 3\cap \overline{4})\cup(1\cap \overline{2}\cap 4)\cup(1\cap 2\cap \overline{3}\cap 4)\} &= P(1\cap 2\cap 3\cap \overline{4})+P(1\cap \overline{2}\cap 4)+P(1\cap 2\cap \overline{3}\cap 4) \\ &= p_1p_2p_3(1-p_4)+p_1(1-p_2)p_4+p_1p_2(1-p_3)p_4 \\ &= p^2(1-p)(1+2p) \end{aligned}$$

となる。

(答) $p^2(1-p)(1+2p)$

(5)

$$f(p)=p^2(1-p)(1+2p)$$

とおく。このとき、

$$f'(p)=-p(8p^2-3p-2)$$

となり、 $f'(p)=0$ となるのは、

$$p=0, \frac{3+\sqrt{73}}{16} \quad (p \geq 0 \text{ より})$$

である。よって、増減表は、以下ようになる。

p	0	...	$\frac{3+\sqrt{73}}{16}$	...	1
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$	0	↗	最大	↘	0

したがって、増減表より、 $f(p)=-p^3+p^2$ が最大となるのは、 $p=\frac{3+\sqrt{73}}{16}$ のときである。

(答) $p=\frac{3+\sqrt{73}}{16}$