

1

(1) (1-1) $b_{n+1} = 2b_n^2$ (1-2) $a_n = 2^{2^n-1} - \frac{1}{2}$

(2) (2-1) $\overline{ME} = -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ (2-2) $BC:CA:AB = \sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{7}$

(3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \frac{19\pi}{12} \leq x < 2\pi$

(4) (4-1) $a = 0, b = 5$ (4-2) $c = -20, d = 25$

【解説】

(1)

(1-1)

漸化式に $a_n = b_n - \frac{1}{2}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n(a_n+1) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - \frac{1}{2} &= 2\left(b_n - \frac{1}{2}\right)\left(b_n + \frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= 2b_n^2 \end{aligned}$$

を得る。

(1-2)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2b_n^2 \text{ の両辺の対数をとると,} \\ \log b_{n+1} &= \log 2 + 2\log b_n \\ \Leftrightarrow \log b_{n+1} + \log 2 &= 2(\log b_n + \log 2) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \log b_n + \log 2 &= 2^{n-1}(\log b_1 + \log 2) \\ &= 2^{n-1}(\log 2 + \log 2) \\ &= 2^n \log 2 \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} \log b_n &= (2^n - 1)\log 2 \\ \Leftrightarrow b_n &= 2^{2^n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= 2^{2^n-1} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

を得る。

(2)

(2-1)

$$\begin{aligned} \overline{ME} &= \overline{CE} - \overline{CM} \\ &= \frac{1}{3}\overline{CA} - \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \\ &= -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \end{aligned}$$

(2-2)

ベクトル $\overline{MF}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表すと

$$\begin{aligned} \overline{MF} &= \overline{CF} - \overline{CM} \\ &= \frac{1}{4}\overline{CB} - \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB}) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $ME \perp CA$ 、 $MF \perp CB$ が成り立つので

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overline{ME} \cdot \overline{CA} = 0 \\ \overline{MF} \cdot \overline{CB} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \left(-\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \vec{a} = 0 \\ \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}\right) \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} |\vec{a}|^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。2式から $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を消去すると、

$$\begin{aligned} 2|\vec{a}|^2 &= 3|\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 2CA^2 &= 3CB^2 \\ \therefore BC:CA &= \sqrt{2}:\sqrt{3} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を得る。さらに、

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= \frac{2}{3}|\vec{a}|^2 + \frac{2}{3}|\vec{a}|^2 + |\vec{a}|^2 \\ &= \frac{7}{3}|\vec{a}|^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$CA:AB = \sqrt{3}:\sqrt{7} \quad \cdots \textcircled{2}$$

を得る。①、②より

$$BC:CA:AB = \sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{7}$$

である。

(3)

不等式を変形すると、

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &\geq 1 \\ \Leftrightarrow 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6} + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &\geq 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &\geq 1 \\ \Leftrightarrow 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) &\geq 1 \\ \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{7\pi}{12}\right) &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x < 2\pi$ のとき、 $\frac{7\pi}{12} \leq x + \frac{7\pi}{12} < \frac{31\pi}{12}$ なので、不等式の解は

$$\frac{7\pi}{12} \leq x + \frac{7\pi}{12} \leq \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \leq x + \frac{7\pi}{12} < \frac{31\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \frac{19\pi}{12} \leq x < 2\pi$$

である。

(4)

(4-1)

$x > 2$ のとき、 $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax^4 + bx^3 + c + d \sin(x^2 - 4)}{x^2 + x - 6} \\ &= \frac{ax^2 + b + \frac{c}{x^2} + d \cdot \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} \end{aligned}$$

となる。 $x \rightarrow \infty$ のとき、この右辺が収束するためには、 $a = 0$ が必要である

さらに、 $a = 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{b}{1} = b$$

となるから、 $b = 5$ であれば良い。

(4-2)

$$f(x) = \frac{5x^2 + c + d \sin(x^2 - 4)}{(x+3)(x-2)}$$

となり、 $x \rightarrow 2$ のとき(分母) $\rightarrow 0$ となるから、(分子) $\rightarrow 0$ が必要である。

よって、

$$20 + c = 0 \Leftrightarrow c = -20$$

が必要である。このとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5x^2 - 20 + d \sin(x^2 - 4)}{(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{5(x+2)}{x+3} + d \cdot \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4} \cdot \frac{x+2}{x+3} \end{aligned}$$

となるから、

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{5 \cdot 4}{5} + d \cdot 1 \cdot \frac{4}{5} = 4 + \frac{4}{5}d$$

となる。これが 24 になるので、

$$4 + \frac{4}{5}d = 24 \Leftrightarrow d = 25$$

であれば良い。

(1)

(1-1)

$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ のとき,

$$m \leq x = m + \alpha < m + 1$$

$$m \leq x + \frac{1}{2} = m + \alpha + \frac{1}{2} < m + 1$$

$$2m \leq 2x = 2m + 2\alpha < 2m + 1$$

が成り立つ。よって、①の左辺は,

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = m + m = 2m$$

となり、①の右辺は,

$$[2x] = 2m$$

となるので、①が成り立つことが示された。

(証明終)

(1-2)

$\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ のとき,

$$m \leq x = m + \alpha < m + 1$$

$$m + 1 \leq x + \frac{1}{2} = m + \alpha + \frac{1}{2} < m + 2$$

$$2m + 1 \leq 2x = 2m + 2\alpha < 2m + 2$$

が成り立つ。よって、①の左辺は,

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = m + (m + 1) = 2m + 1$$

となり、①の右辺は,

$$[2x] = 2m + 1$$

となるので、①が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

(1)と同様に、整数 m と $0 \leq \alpha < 1$ を満たす実数 α を用いて、 $x = m + \alpha$ とおく。
すると,

$$\frac{k}{n} \leq \alpha < \frac{k+1}{n}$$

を満たす整数 k が存在する。ここで、 $0 \leq k \leq n-1$ である。このとき,

$$[x] = \left[x + \frac{1}{n} \right] = \cdots = \left[x + \frac{n-k-1}{n} \right] = m$$

$$\left[x + \frac{n-k}{n} \right] = \cdots = \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = m + 1$$

が成り立つことに注意すると、②の左辺は

$$m(n-k) + (m+1)k = mn + k$$

となる。さらに,

$$mn + k \leq nx = mn + n\alpha < mn + k + 1$$

が成り立つので、②の右辺は

$$[nx] = mn + k$$

となる。以上より、②が成り立つことが示された。

(証明終)

3

(1) (1-1) $-f(y)$ (1-2) $A-\alpha$

(2) $-\frac{5}{4} < a < -1$

(3) $3(\sqrt{6}-\sqrt{2})r^2$

【解説】

(1)

(1-1)

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned}\frac{dg(y)}{dy} &= \frac{d}{dy} \int_y^\beta f(x) dx \\ &= \frac{d}{dy} \{F(\beta) - F(y)\} \\ &= -f(y)\end{aligned}$$

となる。

(1-2)

部分積分を用いて計算すると,

$$\begin{aligned}\int_a^\beta g(y) dy &= [yg(y)]_a^\beta - \int_a^\beta \left\{y \frac{dg(y)}{dy}\right\} dy \\ &= \beta g(\beta) - \alpha g(\alpha) + \int_a^\beta yf(y) dy \\ &= \beta \int_\beta^\beta f(x) dx - \alpha \int_a^\beta f(x) dx + \int_a^\beta yf(y) dy \\ &= \beta \cdot 0 - \alpha \cdot 1 + A \\ &= A - \alpha\end{aligned}$$

となる。

(2)

2つの曲線の方程式から x を消去すると,

$$\begin{aligned}(y-a)+y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow y^2+y-a-1 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

を得る。 $x^2+y^2=1$ において, ある実数 y の値に対応する実数 x の値の個数は,

$-1 < y < 1$ のとき 2 個

$y = \pm 1$ のとき 1 個

$y < -1, 1 < y$ のとき 0 個

であるから, ①が $-1 < y < 1$ の範囲に相異なる 2 個の実数解をもてば良い。

$f(y) = y^2 + y - a - 1$ とおくと, この軸は $y = -\frac{1}{2}$ であるから, 求める条件は,

$$\begin{aligned}f(-1) > 0 \quad \text{かつ} \quad f(1) > 0 \quad \text{かつ} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \\ \Leftrightarrow -a-1 > 0 \quad \text{かつ} \quad 1-a > 0 \quad \text{かつ} \quad -a-\frac{5}{4} < 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < a < -1\end{aligned}$$

となる。

(3)

正 24 角形の隣り合った頂点と, 外接円の中心を結んでできる三角形の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{24} &= \frac{1}{2}r^2 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos \frac{\pi}{6}}{2}} \\ &= \frac{1}{2}r^2 \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}r^2\end{aligned}$$

である。正 24 角形の面積は, この三角形の面積の 24 倍であるから,

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}r^2 \cdot 24 = 3(\sqrt{6}-\sqrt{2})r^2$$

である。

$$(1) \ ab \quad (2) \ 0.2a + 0.8b \quad (3) \ \frac{a}{a+4b} \quad (4) \ a \geq 4b$$

〔解説〕

(1)

抽出された 2 人のうち、一方の人が **XA** を持ち、残りの人が **XB** を持つ確率は

$$0.2 \cdot (1 - 0.2) \cdot 2 = 0.32$$

である。また、抽出された 2 人のうち、一方の人が **XA** を持ち、疾患 **D** であり、残りの人が **XB** を持ち、疾患 **D** である確率は

$$0.2a \cdot (1 - 0.2)b \cdot 2 = 0.32ab$$

である。よって、求める条件つき確率は

$$\frac{0.32ab}{0.32} = ab$$

である。

(2)

抽出された 1 人が、**XA** を持ち、疾患 **D** である確率と、**XB** を持ち、疾患 **D** である確率を足せばよいので、

$$0.2a + 0.8b$$

である。

(3)

抽出された 1 人が、**XA** を持ち、疾患 **D** である確率は $0.2a$ である。

よって、求める条件つき確率は、(2)の答を用いて

$$\frac{0.2a}{0.2a + 0.8b} = \frac{a}{a + 4b}$$

である。

(4)

求める条件は、

$$\frac{a}{a + 4b} \geq 0.5$$

$$\Leftrightarrow a \geq 4b$$

である。