1

(1) (1-1) $\dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$ (1-2) $\dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$ (1-3) $\dfrac{2}{3}(n+1)$

(2) (2-1) 1 (2-2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$ (2-3) $\begin{cases} x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}t \\ y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}t \end{cases}$ (2-4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

〔解説〕

(1)

(1-1)

k 以下のカードを 2 枚取り出せばよい。n 枚のカードから 2 枚取り出す場合の数は ${}_nC_2$，k 枚のカードから 2 枚取り出す場合の数は ${}_kC_2$ より

$$P(X \leqq k)=\frac{{}_kC_2}{{}_nC_2}=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

となる。

(1-2)

$P(X=k)=P(X \leqq k)-P(X \leqq k-1)$ なので(1-1)の結果を利用すると

$$\begin{aligned} P(X=k)&=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}-\frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} \\ &=\frac{(k-1)(k-k+2)}{n(n-1)} \\ &=\frac{2(k-1)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

である。

(1-3)

求める期待値を E とおくと, (1-2)より

$$\begin{aligned} E&=\sum_{k=2}^{n}k\cdot P(X=k) \\ &=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=2}^{n}k(k-1) \\ &=\frac{2}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n}\{(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)\} \\ &=\frac{2}{3n(n-1)}\cdot(n+1)n(n-1) \\ &=\frac{2}{3}(n+1) \end{aligned}$$

となる。

(2)

(2-1)

$\angle \mathrm{OBC}$ が $90°$ なので

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=-\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{b}) \\ &=-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2 \\ &=0 \end{aligned}$$

となる。ここで $\mathrm{OB}=1$ から $|\vec{b}|^2=1$ となるので

$$\begin{aligned} &-\vec{b}\cdot\vec{c}+1=0 \\ \Leftrightarrow\ &\vec{b}\cdot\vec{c}=1 \end{aligned}$$

となる。

(2-2)

$\angle \mathrm{BOC}=\theta$ とおく。

$$|\vec{a}|=1$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{1+t^2}$$

となる。また△OBC は直角三角形なので,

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \sin\theta=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{c}&=1\cdot\sqrt{1+t^2}\cos(60°+\theta) \\ &=\sqrt{1+t^2}(\cos60°\cos\theta-\sin60°\sin\theta) \\ &=\sqrt{1+t^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \\ &=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{aligned}$$

となる。

(2-3)

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{c}&=x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b} \\ &=x+y(1\cdot1\cdot\cos60°) \\ &=x+\frac{1}{2}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{b}\cdot\vec{c}&=x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2 \\ &=\frac{1}{2}x+y \end{aligned}$$

となるので, (2-1), (2-2)より,

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ \dfrac{1}{2}x+y=1 \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと

$$\begin{cases} x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}t \\ y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}t \end{cases}$$

となる。

(2-4)

(2-3)から $\vec{c}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}t\vec{a}+\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}t\right)\vec{b}$ となる。したがって AC の中点は

$$\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}t\right)\vec{a}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)\vec{b}\right\}$$

と表される。$\vec{a}, \vec{b}$ は 1 次独立であるから, AC の中点が OB 上にあるためには，k をある実数としたとき，これが $k\vec{b}$ と表されることが必要十分である。よって，$\vec{a}$ の係数の比較から,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}t\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ &t=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

2

条件から $a+b=2k_1+1$，$ab=2l$ (k_1, l は整数)とおける。

(1)

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(a+b)^2-2ab\\&=(2k_1+1)^2-4l\\&=4k_1{}^2+4k_1+1-4l\\&=2(2k_1{}^2+2k_1-2l)+1\end{aligned}$$

となる。k_1，l は整数なので a^2+b^2 が整数でありかつ奇数であることが示せた。

(証明終)

(2)

(1)の結果から，$a^2+b^2=2k_2+1$ (k_2 は整数)とおくことができる。このとき，

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(a^2+b^2)(a+b)-ab(a+b)\\&=(2k_2+1)(2k_1+1)-2l(2k_1+1)\\&=4k_1k_2+2k_2+2k_1+1-2(2k_1l+l)\\&=2(2k_1k_2+k_1+k_2-2k_1l-l)+1\end{aligned}$$

となる。k_1，l，k_2 は整数なので a^3+b^3 が整数でありかつ奇数であることが示せた。

(証明終)

(3)

数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

条件から $a+b$ は奇数なので成立する。

[2] $n=2$ のとき

(1)の結果から成立する。

[3] $n=m, m+1$ で成り立つと仮定して，$n=m+2$ のとき

整数 k_m, k_{m+1} を用いて $a^m+b^m=2k_m+1, a^{m+1}+b^{m+1}=2k_{m+1}+1$ とおける。すると，

$$\begin{aligned}a^{m+2}+b^{m+2}&=(a^{m+1}+b^{m+1})(a+b)-ab(a^m+b^m)\\&=(2k_{m+1}+1)(2k_1+1)-2l(2k_m+1)\\&=4k_1k_{m+1}+2k_{m+1}+2k_1+1-2(2lk_m+l)\\&=2(2k_1k_{m+1}+k_1+k_{m+1}-2lk_m+l)+1\end{aligned}$$

となる。k_1，l，k_m，k_{m+1} は整数なので $a^{m+2}+b^{m+2}$ は整数であり，しかも奇数となる。よって，$n=k+2$ でも成立することが分かる。

以上, [1], [2], [3]から題意は示せた。

(証明終)

(4)

例えば $a=\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}$, $b=\dfrac{7-\sqrt{41}}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}a+b&=\frac{7+\sqrt{41}}{2}+\frac{7-\sqrt{41}}{2}\\&=7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ab&=\frac{7+\sqrt{41}}{2}\cdot\frac{7-\sqrt{41}}{2}\\&=\frac{49-41}{4}\\&=2\end{aligned}$$

となる。

(答)　$a=\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}$, $b=\dfrac{7-\sqrt{41}}{2}$

$\boxed{3}$

(1) $0<x\leqq\dfrac{2}{3}$ (2) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ (3) $3a+b=4$ (4) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$

〔解説〕

(1)

真数条件より

$$\begin{cases}1-x>0\\x+2>0\\x>0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 0<x<1$$

となる。条件式の底を 64 にそろえると

$$\log_8(1-x)=2\log_{64}(1-x)$$
$$=\log_{64}(1-x)^2$$
$$\log_4 x=3\log_{64}x$$
$$=\log_{64}x^3$$

となるので

$$\log_8(1-x)+\log_{64}(x+2)\geqq\log_4 x$$
$$\Leftrightarrow \log_{64}(1-x)^2+\log_{64}(x+2)\geqq\log_{64}x^3$$
$$\Leftrightarrow \log_{64}(1-x)^2(x+2)\geqq\log_{64}x^3$$

となる。ここで底が 1 より大きいので

$$\Leftrightarrow (1-x)^2(x+2)\geqq x^3$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x+2\geqq x^3$$
$$\Leftrightarrow x\leqq\frac{2}{3}$$

となる。$0<x<1$ と合わせて $0<x\leqq\dfrac{2}{3}$ となる。

(2)

$\sin x+\cos x=k$ とおく。

$$\tan x+\frac{1}{\tan x}=\frac{10}{3}$$
$$\Leftrightarrow 3\tan^2 x-10\tan x+3=0,\ \tan x\neq 0$$
$$\Leftrightarrow (3\tan x-1)(\tan x-3)=0,\ \tan x\neq 0$$
$$\therefore \tan x=3,\ \frac{1}{3}$$

となる。いま，$0<x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ なので，$0<\tan x\leqq 1$ であり，よって $\tan x=\dfrac{1}{3}$ である。

このとき，$\sin x$, $\cos x$ とも正であるから，

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos x=\frac{3}{\sqrt{10}}$$
$$\therefore \sin x+\cos x=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

と求まる。

(3)

行列 $\begin{pmatrix}a&1-a\\1-b&b\end{pmatrix}$ によって $(t,\ 3t)$ が移動した先の座標は

$$\begin{pmatrix}a&1-a\\1-b&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}at+3t-3at\\t-bt+3bt\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3t-2at\\t+2bt\end{pmatrix}$$

である。これが $y=3x$ 上にあればよいので

$$t+2bt=3(3t-2at)$$
$$\Leftrightarrow t+2bt=9t-6at$$
$$\Leftrightarrow t(3a+b-4)=0$$

となる。これが t によらず常に成立するためには

$$3a+b-4=0$$
$$\Leftrightarrow 3a+b=4$$

であることが必要十分である。

(4)

$A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ の両辺に左から A^{-1} をかけると $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ となる。$A^{-1}=A$ から $A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

がわかる。したがって

$$A\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\-1&3\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow A=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-3\\-3&1\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$$

となる。

$\boxed{4}$

(1) (1-1) $y=2x-1$ (1-2) $\dfrac{2}{3}$

(2) (2-1) $\dfrac{\pi}{2}$ (2-2) π (2-3) -2 (2-4) $\dfrac{2}{3}\pi^3-2\pi$

[解説]

(1)

(1-1)

C_1に関して

$$\begin{aligned}&y=x^2-2x+3\\&\Rightarrow y'=2x-2\end{aligned}$$

より点$\left(t,\,t^2-2t+3\right)$における接線の方程式は

$$\begin{aligned}&y-\left(t^2-2t+3\right)=\left(2t-2\right)\left(x-t\right)\\&\Leftrightarrow y=\left(2t-2\right)x-t^2+3\end{aligned}$$

となる。これとC_2の交点を考えると

$$\begin{aligned}&\begin{cases}y=\left(2t-2\right)x-t^2+3\\y=x^2+2x-1\end{cases}\\&\Rightarrow\left(2t-2\right)x-t^2+3=x^2+2x-1\\&\Leftrightarrow x^2-2\left(t-2\right)x+t^2-4=0\end{aligned}$$

となる。$y=\left(2t-2\right)x-t^2+3$と$C_2$が接するためにはこの2次方程式が重解をもてばよいので，方程式の判別式をDとして，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\left(t-2\right)^2-\left(t^2-4\right)\\&=t^2-4t+4-t^2+4\\&=-4t+8\\&=0\\\Leftrightarrow t&=2\end{aligned}$$

つまり接線の方程式は$y=2x-1$となる。

(1-2)

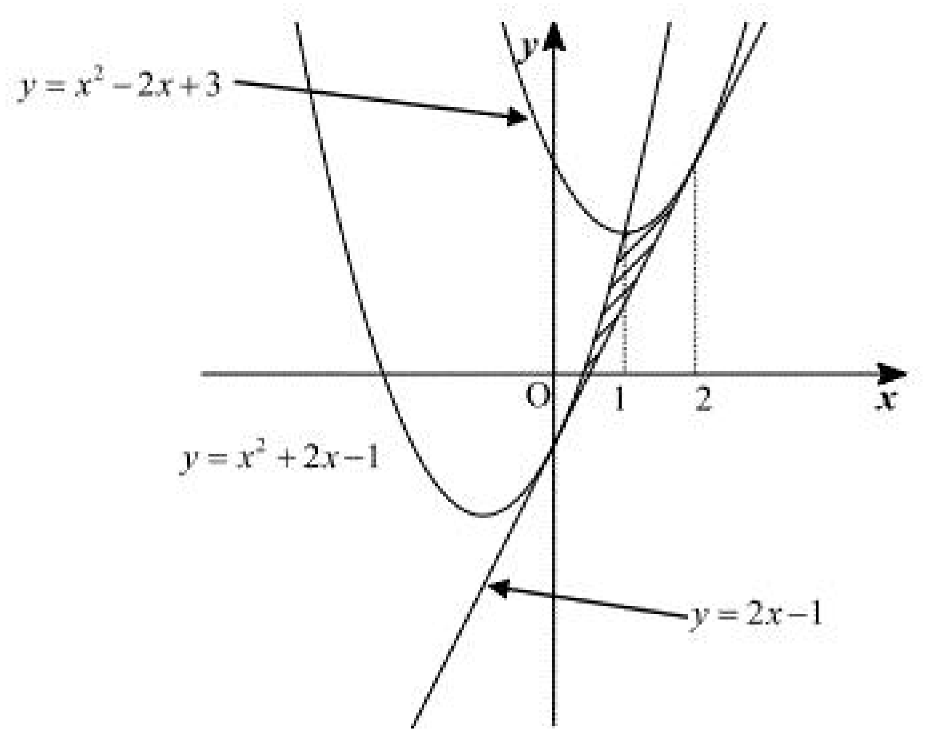
(1-1)からC_1と接線の交点の座標は$\left(2,\,3\right)$となる。またC_2と接線の交点の座標は

$$\begin{aligned}&\begin{cases}y=2x-1\\y=x^2+2x-1\end{cases}\\&\Rightarrow x^2+2x-1=2x-1\\&\Leftrightarrow x^2=0\\&\Leftrightarrow x=0\end{aligned}$$

から$\left(0,\,-1\right)$となる。またC_1とC_2の交点の座標は

$$\begin{aligned}&\begin{cases}y=x^2-2x+3\\y=x^2+2x-1\end{cases}\\&\Rightarrow x^2-2x+3=x^2+2x-1\\&\Leftrightarrow x=1\end{aligned}$$

から$\left(1,\,0\right)$となる。以上から図を描くと求める面積は以下の図の斜線部の面積になる。



以上より求める面積は

$$\begin{aligned}\int_0^1\left\{x^2+2x-1-\left(2x-1\right)\right\}dx+\int_1^2\left\{x^2-2x+3-\left(2x-1\right)\right\}dx&=\int_0^1x^2dx+\int_1^2\left(x-2\right)^2dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}\left(x-2\right)^3\right]_1^2\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

となる。

(2)

(2-1)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\sin^2xdx&=\int_0^\pi\frac{1-\cos2x}{2}dx\\&=\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin2x\right]_0^\pi\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

となる。

(2-2)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin xdx&=\int_0^\pi x\left(-\cos x\right)'dx\\&=\left[-x\cos x\right]_0^\pi+\int_0^\pi\cos xdx\\&=\pi+\left[\sin x\right]_0^\pi\\&=\pi\end{aligned}$$

となる。

(2-3)

$$\left(x+1+k\sin x\right)^2=x^2+1+k^2\sin^2x+2x+2kx\sin x+2k\sin x$$

となる。ここでx^2, 1, $k^2\sin^2x$，$2kx\sin x$は偶関数，$2x$，$2k\sin x$は奇関数なので

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+1+k\sin x\right)^2dx\\&=2\int_0^\pi\left(x^2+1+k^2\sin^2x+2kx\sin x\right)dx\\&=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^\pi+2k^2\int_0^\pi\sin^2xdx+4k\int_0^\pi x\sin xdx\\&=2\left(\frac{1}{3}\pi^3+\pi\right)+2k^2\int_0^\pi\sin^2xdx+4k\int_0^\pi x\sin xdx\end{aligned}$$

となる。ここに(2-1), (2-2)の結果を利用すると

$$\begin{aligned}&=2\left(\frac{1}{3}\pi^3+\pi\right)+k^2\pi+4k\pi\\&=\pi\left(k+2\right)^2+\frac{2}{3}\pi^3-2\pi\end{aligned}$$

となる。したがって，Iは$k=-2$のときに最小である。

(2-4)

$k=-2$のときの$I=\dfrac{2}{3}\pi^3-2\pi$が最小値である。