1

〔解答〕

(1)

$$\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi \leqq x \leqq \frac{5}{3}\pi$$

(2)

(2-1) 50 個　　　(2-2) 25250

(3)

(3-1) $\frac{1}{3}$　　　(3-2) $\frac{1}{3}$　　　(3-3) $\frac{n+1}{3^n}$

〔解説〕

(1)

与式より,

$$4\left(1-\cos^2 x\right)+\left(2-2\sqrt{2}\right)\cos x+\sqrt{2}-4 \geqq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x+\left(2\sqrt{2}-2\right)\cos x-\sqrt{2} \leqq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos x+\sqrt{2}\right)\left(2\cos x-1\right) \leqq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \cos x \leqq \frac{1}{2}$$

である。よって, $0 \leqq x \leqq 2\pi$ より,

$$\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi \leqq x \leqq \frac{5}{3}\pi$$

とわかる。

(答) $\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi \leqq x \leqq \frac{5}{3}\pi$

(2)

(2-1)

等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項はそれぞれ,

$$a_n = 3+4(n-1) = 4n-1$$
$$b_n = 1000-5(m-1) = -5m+1005$$

とわかる。

各数列の項は,

$$\{a_n\} = 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, \cdots, 991, 995, 999, \cdots$$
$$\{b_n\} = 1000, 995, 990, \cdots, 40, 35, 30, 25, 15, 10, 5, \cdots$$

である。よって, 共通項は, 初項 15, 末項 995, 公差 20 の数列なので, 個数は,

$$\frac{995-15}{20}+1 = 50$$

となる。

(答) 50 個

(2-2)

共通項を小さい方から並べて作った数列を $\{c_n\}$ とすると, その一般項は

$$c_n = 15+20(n-1) = 20n-5 \quad (1 \leqq n \leqq 50)$$

と表される。よって, その総和は

$$\sum_{k=1}^{50} c_k = \sum_{k=1}^{50}(20k-5)$$
$$= 20\cdot\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 51 - 5\cdot 50$$
$$= 25250$$

である。

(答) 25250

(3)

(3-1)

1 回目のじゃんけんにおいて 3 人の手の出し方は全部で $3^3 = 27$ 通りである。

3 人が同じ手を出してあいこになる場合の数は, 手の種類の数（グー, チョキ, パー）と同じ 3 通りである。3 人全員が異なる手を出してあいこになる場合の数は $3\cdot 2\cdot 1 = 6$ 通りである。

よって, 1 回目のじゃんけんで勝者がいない確率, すなわち 1 回目があいこで終わる確率は

$$\frac{3+6}{27} = \frac{1}{3}$$

である。

(答) $\frac{1}{3}$

(3-2)

2 回じゃんけんをしても勝者が 1 人に決まらないのは,

[1] 1 回目でも 2 回目でもあいことなり勝者が 1 人も出ない

[2] 1 回目で勝者が 1 人も出ず, 2 回目で 2 人の勝者が出る

[3] 1 回目で勝者が 2 人出て, 2 回目で 2 人があいことなる

の 3 パターンである。

[1] 1 回目でも 2 回目でもあいことなり勝者が 1 人も出ないとき

1 回目のじゃんけんも 2 回目のじゃんけんも 3 人でおこなうので, これが両方ともあいことなる確率は(3-1)の結果を用いて

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

と求まる。

[2] 1 回目で勝者が 1 人も出ず, 2 回目で 2 人の勝者が出るとき

3 人でじゃんけんをして 2 人の勝者が出る場合の数は, 勝者と手の種類の組み合わせを考えて

$${}_3C_2\cdot{}_3C_1 = 9 \text{ 通り}$$

であるから, その確率は

$$\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

である。よって, 1 回目で勝者が 1 人も出ず 2 回目で 2 人の勝者が出る確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

である。

[3] 1 回目で勝者が 2 人出て, 2 回目で 2 人があいことなるとき

2 人でじゃんけんをしてあいことなる場合の数は手の種類の数と同じ 3 通りであり, 手の出し方は全部で $3^2 = 9$ 通りあるから, その確率は

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

である。よって, 1 回目で勝者が 2 人出て 2 回目で 2 人があいことなる確率は,

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

である。

以上[1], [2], [3]より, 2 回じゃんけんをしても勝者が 1 人に決まらない確率は

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

である。

(答) $\frac{1}{3}$

(3-3)

n 回じゃんけんをしたあとに後に 3 人, 2 人残っている（負けていない）確率をそれぞれ p_n, q_n とすると,

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n \quad \cdots ①$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n \quad \cdots ②$$

が成り立つ。①より, 数列 $\{p_n\}$ は $p_0 = 1$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列なので,

$$p_n = 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

である。これを②に代入して,

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

となるので, 両辺に 3^{n+1} をかけて,

$$3^{n+1}\cdot q_{n+1} = 3^n\cdot q_n + 1$$

となる。数列 $\{3^n\cdot q_n\}$ は $3^0\cdot q_0 = 0$, 公差 1 の等差数列なので,

$$3^n\cdot q_n = 0+1\cdot n$$
$$\Leftrightarrow q_n = \frac{n}{3^n}$$

となる。ゆえに, 求める確率は,

$$p_n + q_n = \frac{1}{3^n}+\frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3^n}$$

とわかる。

(答) $\frac{n+1}{3^n}$

2

(1)

Qは線分OM上の点なので，kを$0<k<1$を満たす実数として，

$$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OM}$$
$$=k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)$$
$$=\frac{k}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{OB}$$
$$=\frac{k}{3p}\left(p\overrightarrow{OA}\right)+\frac{2}{3}k\overrightarrow{OB}$$
$$=\frac{k}{3p}\overrightarrow{OP}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{OB}$$

と表せる。Qは線分BP上の点でもあるので，

$$\frac{k}{3p}+\frac{2}{3}k=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{2p+1}{3p}k=1$$
$$\Leftrightarrow k=\frac{3p}{2p+1}\ (\because 2p+1\neq 0)$$

とわかる。よって，

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{p}{2p+1}\vec{a}+\frac{2p}{2p+1}\vec{b}$$

と求まる。

(答) $\overrightarrow{OQ}=\frac{p}{2p+1}\vec{a}+\frac{2p}{2p+1}\vec{b}$

(2)

$\overrightarrow{PQ}$は，

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$
$$=\left(\frac{p}{2p+1}\vec{a}+\frac{2p}{2p+1}\vec{b}\right)-p\vec{a}$$
$$=-\frac{2p^2}{2p+1}\vec{a}+\frac{2p}{2p+1}\vec{b}$$

と表わされる。

(答) $\overrightarrow{PQ}=-\frac{2p^2}{2p+1}\vec{a}+\frac{2p}{2p+1}\vec{b}$

(3)

△OABは正三角形なので，

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\\ |\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=1\end{cases}$$

となる。ここで，

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\left|p\vec{a}\right|^2=p^2$$

$$\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2=\left|\frac{p}{2p+1}\vec{a}+\frac{2p}{2p+1}\vec{b}\right|^2$$
$$=\left(\frac{p}{2p+1}\right)^2+\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^2+2\cdot\frac{p}{2p+1}\cdot\frac{2p}{2p+1}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{7p^2}{(2p+1)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=\left|-\frac{2p^2}{2p+1}\vec{a}+\frac{2p}{2p+1}\vec{b}\right|^2$$
$$=\left(-\frac{2p^2}{2p+1}\right)^2+\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{2p^2}{2p+1}\right)\cdot\frac{2p}{2p+1}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{4p^4-4p^3+4p^2}{(2p+1)^2}$$

とわかる。△OPQが二等辺三角形となるのは

[1] OP = OQ

[2] OP = PQ

[3] OQ = PQ

の3パターンが考えられる。

[1] OP = OQのとき

$$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$$
$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2\quad(\because \mathrm{OP}>0,\ \mathrm{OQ}>0)$$
$$\Leftrightarrow p^2=\frac{7p^2}{(2p+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow (2p+1)^2=7\quad(\because p\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow 2p^2+2p-3=0$$
$$\Leftrightarrow \left(p-\frac{\sqrt{7}-1}{2}\right)\left(p-\frac{\sqrt{7}+1}{2}\right)=0$$

であるが，$0<p<1$より

$$p=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

である。

[2] OP = PQのとき

$$\mathrm{OP}=\mathrm{PQ}$$
$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2\quad(\because \mathrm{OP}>0,\ \mathrm{PQ}>0)$$
$$\Leftrightarrow p^2=\frac{4p^4-4p^3+4p^2}{(2p+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow (2p+1)^2=4p^2-4p+4\quad(\because p\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow 8p=3$$
$$\Leftrightarrow p=\frac{3}{8}$$

と求まる。

[3] OQ = PQのとき

$$\mathrm{OQ}=\mathrm{PQ}$$
$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OQ}\right|^2=\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2\quad(\because \mathrm{OQ}>0,\ \mathrm{PQ}>0)$$
$$\Leftrightarrow \frac{7p^2}{(2p+1)^2}=\frac{4p^4-4p^3+4p^2}{(2p+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow 7=4p^2-4p+4\quad(\because p\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow 4p^2-4p-3=0$$
$$\Leftrightarrow \left(p-\frac{3}{2}\right)\left(p+\frac{1}{2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow p=-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$$

であるが，$0<p<1$を満たさないため，不適である。

以上[1], [2], [3]より求めるpは，

$$p=\frac{\sqrt{7}-1}{2},\ \frac{3}{8}$$

である。

(答) $p=\frac{\sqrt{7}-1}{2},\ \frac{3}{8}$

$\boxed{3}$

(1)

$\sqrt[3]{5} < a+b \leqq \sqrt[3]{20}$

(2)

$1 < x < \dfrac{27}{2}$

(3)

$\dfrac{5}{2}$

(4)

$m = -2^{1006},\ n = 0$

〔解説〕

(1)

$a+b=k$ とおくと,

$$b = k-a$$

である。$b>0$ なので,

$$b>0$$
$$\Leftrightarrow k-a>0$$
$$\Leftrightarrow a<k$$

となる。$a>0$ とあわせて,

$$0<a<k \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

となる。また,$a^3+b^3=5$ に $b=k-a$ を代入して,

$$a^3+(k-a)^3=5$$
$$\Leftrightarrow 3ka^2-3k^2a+k^3-5=0$$
$$\Leftrightarrow 3k\left(a-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{1}{4}k^3-5=0 \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

となる。これを a の2次式とみたとき,①の範囲に解を持つ a を求める。②の左辺を $f(a)$ とすると,$k>0$ より,$y=f(a)$ は下に凸の二次関数である。よって,求める条件は,

[1] $f(0)\cdot f(k)<0$

または,

[2] 2次方程式 $f(a)=0$ の判別式 $D \geqq 0$

軸:$0<\dfrac{k}{2}<k$

端:$f(0)>0$ または $f(k)>0$

である。

[1]のとき,

$$f(0)\cdot f(k)<0$$
$$\Leftrightarrow (k^3-5)^2<0$$

を満たす k は存在せず,不適である。

[2]のとき,

$$\begin{cases} 9k^4-4\cdot 3k\cdot(k^3-5)\geqq 0 \\ k>0 \\ k^3-5>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^3 \leqq 20 \\ k>0 \\ k^3>5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{5} < k \leqq \sqrt[3]{20}$$

と求まる。

以上[1], [2]より,

$$\sqrt[3]{5} < k \leqq \sqrt[3]{20}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{5} < a+b \leqq \sqrt[3]{20}$$

と求まる。

(答) $\sqrt[3]{5} < a+b \leqq \sqrt[3]{20}$

(2)

真数条件および題意より,

$$x>0,\ x\neq 1 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

となる。よって,与式は,

$$1+\frac{1}{\log_2 x}+\frac{3}{\log_3 x}<0$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\log_2 x}-\frac{3\log_2 3}{\log_2 x}<0$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x(\log_2 x+1-3\log_2 3)<0 \quad (\because (\log_2 x)^2>0)$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x\cdot\log_2\frac{2x}{27}<0$$

$\Leftrightarrow$ ($x>1$ かつ $\dfrac{2x}{27}<1$) または ($x<1$ かつ $\dfrac{2x}{27}>1$)

$$\Leftrightarrow 1<x<\frac{27}{2}$$

とわかる。これは①を満たすので,題意に適する。

(答) $1<x<\dfrac{27}{2}$

(3)

点Pは楕円 $x^2+5(y-1)^2=5$ 上にあるので,P $(\sqrt{5}\cos\theta,\ \sin\theta+1)\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおける。このとき,

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}^2 &= (\sqrt{5}\cos\theta)^2+(\sin\theta+1)^2 \\ &= 5\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta+1 \\ &= 5(1-\sin^2\theta)+\sin^2\theta+2\sin\theta+1 \\ &= -4\sin^2\theta+2\sin\theta+6 \\ &= -4\left(\sin\theta-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{4} \end{aligned}$$

となる。$0\leqq\theta<2\pi$ より,$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ なので,OP^2 の最大値は,$\sin\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき $\dfrac{25}{4}$ となる。$\mathrm{OP}>0$ より,OPの最大値は

$$\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

と求まる。

(答) $\dfrac{5}{2}$

(4)

$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$,$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ より,

$$\begin{cases} A^2=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-I \\ AI=IA=A \end{cases}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} (I+A)^{2012} &= \left\{(I+A)^2\right\}^{1006} \\ &= (I+2A+A^2)^{1006} \\ &= (2A)^{1006} \\ &= 2^{1006}\cdot(A^2)^{503} \\ &= 2^{1006}\cdot(-I)^{503} \\ &= -2^{1006}I \end{aligned}$$

である。$(I+A)^{2012}=mI+nA$ と表すとき,

$$m=-2^{1006},\ n=0$$

と求まる。

(答) $m=-2^{1006},\ n=0$

4

(1)

(1-1)　$(0,0)$，$\left(2\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$　　　(3-2)　8

(2)

$a=4\sqrt{2}$，$b=8$

(3)

$\log_3 7$

〔解説〕

(1)

(1-1)

$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x\left(x-\sqrt{3}\right)$ を $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y\left(y-\sqrt{3}\right)$ に代入して，

$$
\begin{aligned}
&x=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}x\left(x-\sqrt{3}\right)\right\}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}x\left(x-\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}\right\}\\
&\Leftrightarrow x\left[\left(x-\sqrt{3}\right)\left\{x\left(x-\sqrt{3}\right)-3\right\}-3\sqrt{3}\right]=0\\
&\Leftrightarrow x\left\{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x^2-\sqrt{3}x-3\right)-3\sqrt{3}\right\}=0\\
&\Leftrightarrow x^3\left(x-2\sqrt{3}\right)=0\\
&\Leftrightarrow x=0,\ 2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

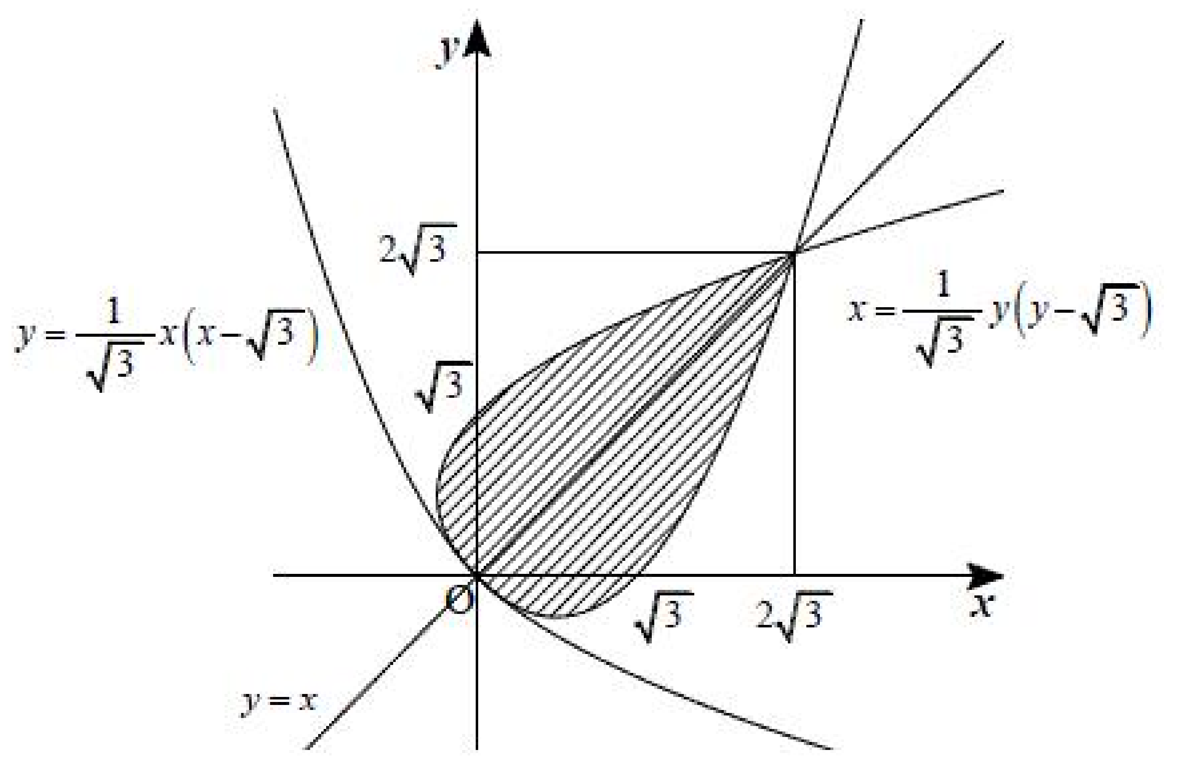
となる。よって，求める交点は，

$$(0,0),\ \left(2\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$$

とわかる。

(答)　$(0,0)$，$\left(2\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$

(1-2)



求める面積は，上図斜線部となる。よって，

$$
\begin{aligned}
&2\times\int_0^{2\sqrt{3}}\left\{x-\frac{1}{\sqrt{3}}x\left(x-\sqrt{3}\right)\right\}dx\\
&=2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\int_0^{2\sqrt{3}}\left\{x\left(x-2\sqrt{3}\right)\right\}dx\\
&=-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left\{-\frac{\left(2\sqrt{3}-0\right)^3}{6}\right\}\\
&=8
\end{aligned}
$$

とわかる。

(答) 8

(2)

$x>0$ のとき

$$a\sqrt{2x^2+x+1}-bx=x\left(a\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-b\right)$$

と変形でき，ここで $\lim_{x\to\infty}x=\infty$ であるから，$\lim_{x\to\infty}\left(a\sqrt{2x^2+x+1}-bx\right)$ が収束するためには

$$\lim_{x\to\infty}\left(a\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-b\right)=0 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

となる必要がある。ここで $\lim_{x\to\infty}\left(a\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-b\right)=\sqrt{2}a-b$ であるから，①より

$$\sqrt{2}a-b=0 \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

であることが必要であることがわかり，このとき

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(a\sqrt{2x^2+x+1}-bx\right)&=\lim_{x\to\infty}\left(a\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}ax\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\sqrt{2}a\left(\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}-x\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\sqrt{2}a\frac{\left(\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}-x\right)\left(\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}+x\right)}\\
&=\sqrt{2}a\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}+x}\\
&=\sqrt{2}a\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}}{\sqrt{1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}}+1}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{4}a
\end{aligned}
$$

であるから，これが2に等しいとき $a=4\sqrt{2}$ と求まる。さらに②より $b=8$ であることがわかる。

(答)　$a=4\sqrt{2}$，$b=8$

(3)

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\int_0^x 3^t\left(3^t-4\right)(x-t)\,dt\\
&=x\int_0^x 3^t\left(3^t-4\right)dt-\int_0^x 3^t\left(3^t-4\right)t\,dt
\end{aligned}
$$

のように変形できるので，

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\int_0^x 3^t\left(3^t-4\right)dt+x\cdot 3^x\left(3^x-4\right)-3^x\left(3^x-4\right)x\\
&=\int_0^x 3^t\left(3^t-4\right)dt\\
&=\int_0^x\left(9^t-4\cdot 3^t\right)dt\\
&=\left[\frac{9^t}{\log 9}-\frac{4}{\log 3}\cdot 3^t\right]_0^x\\
&=\frac{1}{2\log 3}\cdot\left(9^x-1\right)-\frac{4}{\log 3}\cdot\left(3^x-1\right)\\
&=\frac{1}{2\log 3}\left\{\left(3^x\right)^2-8\cdot 3^x+7\right\}\\
&=\frac{1}{2\log 3}\left(3^x-1\right)\left(3^x-7\right)
\end{aligned}
$$

となる。したがって，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	$\log_3 7$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$f(\log_3 7)$	↗

ゆえに，$f(x)$ が最小となる x は $\log_3 7$ とわかる。

(答)　$\log_3 7$