

1

(1)

$\overrightarrow{AB}=(-6, 3, 12)$ となるので原点 O に対し、実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{AB} \\ &= (2-6t, -3+3t, 12t)\end{aligned}$$

と表される。これより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} \\ &= (6-6t, 3+3t, 12t-3)\end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ であることから

$$\begin{aligned}(6-6t) \cdot (-6) + (3+3t) \cdot 3 + (12t-3) \cdot 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2(2-2t) + (1+t) + 4(4t-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 21t-7 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OH} = (0, -2, 4)$$

となる。

(答) $(0, -2, 4)$

(2)

(2-1)

$\cos \frac{\theta}{2} = 0$ において $\tan \frac{\theta}{2}$ は定義されない。よって本問においては $\cos \frac{\theta}{2} \neq 0$ の場合のみ考え

ればよい。倍角の公式から

$$\begin{aligned}\sin \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin \theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} &= 2 \tan \frac{\theta}{2} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。また

$$1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned}(1+t^2) \sin \theta &= 2t \\ \Leftrightarrow \sin \theta &= \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$

(2-2)

倍角の公式と $\textcircled{2}$ から

$$\begin{aligned}\cos \theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ &= \frac{2}{1+t^2} - 1 \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\sin \theta + \cos \theta &= -\frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} &= -\frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow 10t+5-5t^2 &= -t^2-1 \\ \Leftrightarrow 2t^2-5t-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2t+1)(t-3) &= 0 \\ \therefore t &= -\frac{1}{2}, 3\end{aligned}$$

となる。

(答) $\tan \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}, 3$

(3)

(3-1)

1 回目に m 以外の数が出て 2 回目に m が出る確率は

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

となる。

(答) $\frac{1}{n}$

(3-2)

1 回目で $m-1$ 以下の数が出て 2 回目に m が出る確率は

$$\frac{m-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{m-1}{n(n-1)}$$

となる。

(答) $\frac{m-1}{n(n-1)}$

(3-3)

1 回目で m が出るとすると、2 回目に $m-1$ 以下の数が出るとき得点が 0 となるのでその確率は

$$\frac{1}{n} \times \frac{m-1}{n-1} = \frac{m-1}{n(n-1)}$$

となる。よって求める確率は

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^n \frac{m-1}{n(n-1)} &= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} - n \right\} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

(3-4)

1 回目で $m-1$ 以下の数が出て 2 回目に m が出る確率は $\frac{m-1}{n(n-1)}$ でありそのときの得点は m で

あるので求める期待値は

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^n \frac{m-1}{n(n-1)} \cdot m &= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \\ &= \frac{n+1}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{n+1}{3}$

2

(1)

C_1 に接する直線の傾きは $y' = 2x$ から実数であることがわかる。よって C_1, C_2 の共通接線は実数 a, b を用いて

$$y = ax + b$$

と書ける。ここで、 $a = 0$ のとき、この直線は、 C_2 の接線にならないので、 $a \neq 0$ について考える。 $y = ax + b$ を C_1, C_2 の方程式に代入した次の方程式に重解が存在する。

$$ax + b = x^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(ax + b)^2 = x \quad \dots \textcircled{2}$$

①から

$$x^2 - ax - b = 0$$

となり重解条件は

$$a^2 + 4b = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。また、②から

$$a^2x^2 + (2ab - 1)x + b^2 = 0$$

となり重解条件は

$$\begin{aligned} (2ab - 1)^2 - 4a^2b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4ab &= 1 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。③、④から

$$\begin{aligned} a^3 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + 1)(a^2 - a + 1) &= 0 \\ \therefore a &= -1 (\because a \text{ は実数}) \end{aligned}$$

となる。これと③から

$$b = -\frac{1}{4}$$

であることが求められる。よって求める直線の方程式は

$$y = -x - \frac{1}{4}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad y = -x - \frac{1}{4}$$

(2)

直線と C_2 との接点を (t^2, t) とおくと C_2 に接する接線の方程式は

$$\frac{dx}{dy} = 2y$$

より

$$\begin{aligned} x &= 2t(y - t) + t^2 \\ \Leftrightarrow x &= 2ty - t^2 \end{aligned}$$

となる。この直線が点 (p, p^2) を通るとき

$$\begin{aligned} p &= 2tp^2 - t^2 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2p^2t + p &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで t についての 2 次方程式 $t^2 - 2p^2t + p = 0$ が異なる 2 つの実数解を持つとき点 P を通り C_1 と接する直線が 2 本引けるため題意が満たされる。よって求める条件は

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (p^2)^2 - p > 0 \\ \Leftrightarrow p(p^3 - 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow p(p - 1)(p^2 + p + 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow p < 0, p > 1 \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad p < 0, 1 < p$$

(3)

C_1 上の点 P を通る直線は C_1 と接するか C_1 と点 P 以外の交点を持つかのいずれかである。よって点 P を通る直線が C_1 と接する条件を考える。 C_1 と点 P で接するときの接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2p(x - p) + p^2 \\ \Leftrightarrow y &= 2px - p^2 \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

となる(1)から C_1 と接する直線が C_2 とも接するときの接線の方程式は $y = -x - \frac{1}{4}$ であるので

⑤との比較により

$$p = -\frac{1}{2}$$

が点 P を通る直線が C_1 と接する条件であることが分かる。よって題意を満たすとき

$$p \neq -\frac{1}{2}$$

となり、(2)から求める必要十分条件は

$$p < -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < p < 0, p > 1$$

となる。

$$\text{(答)} \quad p < -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < p < 0, 1 < p$$

(4)

直線 Q_1Q_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1 - q_2}(x - q_1) + q_1^2 \\ \Leftrightarrow y &= (q_1 + q_2)x - q_1q_2 \end{aligned}$$

となる。これが C_2 と接するとき

$$\begin{aligned} \{(q_1 + q_2)x - q_1q_2\}^2 &= x \\ \Leftrightarrow (q_1 + q_2)^2x^2 - \{2q_1q_2(q_1 + q_2) + 1\}x + q_1^2q_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

に重解が存在する。 $q_1 + q_2 = 0$ のとき重解を持たないので、 $q_1 + q_2 \neq 0$ について考える。求める条件は

$$\begin{aligned} D &= \{2q_1q_2(q_1 + q_2) + 1\}^2 - 4q_1^2q_2^2(q_1 + q_2)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow 4q_1^2q_2^2(q_1 + q_2)^2 + 4q_1q_2(q_1 + q_2) + 1 - 4q_1^2q_2^2(q_1 + q_2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow q_1q_2(q_1 + q_2) &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。これは、 $q_1 + q_2 \neq 0$ も満たす。

$$\text{(答)} \quad q_1q_2(q_1 + q_2) = -\frac{1}{4}$$

(5)

(2)から C_2 に接する接線の方程式は

$$x = 2ty - t^2 \quad \dots \textcircled{6}$$

でありこの直線が点 (p, p^2) を通るとき

$$t^2 - 2p^2t + p = 0 \quad \dots \textcircled{7}$$

となる。⑥、⑦から

$$\begin{aligned} x &= 2ty - 2p^2t + p \\ \Leftrightarrow x &= 2t(y - p^2) + p \end{aligned}$$

が成り立つ。この方程式に $y = x^2$ を代入し C_2 に接する接線の方程式と C_1 との交点の x 座標を求める。

$$\begin{aligned} x &= 2t(x^2 - p^2) + p \\ \Leftrightarrow 2t(x + p)(x - p) - (x - p) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{2t(x + p) - 1\}(x - p) &= 0 \end{aligned}$$

となり、ここで $t = 0$ のときこの方程式に 2 つの解が存在しないため不適であることに注意するとこの方程式の解は

$$x = p, \frac{1}{2t} - p$$

となる。よって 2 次方程式 $t^2 - 2p^2t + p = 0$ の 2 解を t_1, t_2 とおくと

$$q_1 = \frac{1}{2t_1} - p, q_2 = \frac{1}{2t_2} - p$$

とおける。ここで

$$q_1 + q_2 = \frac{t_1 + t_2}{2t_1t_2} - 2p, q_1q_2 = \frac{1}{4t_1t_2} - \frac{t_1 + t_2}{2t_1t_2}p + p^2$$

となる。⑦の方程式において解と係数の関係から

$$t_1 + t_2 = 2p^2, t_1t_2 = p$$

となる。よって

$$q_1 + q_2 = -p, q_1q_2 = \frac{1}{4p}$$

となり(4)で証明した等式から直線 Q_1Q_2 が C_2 と接することが分かる。

(証明終)

(3)

(1)

(1-1)

焦点は $(\sqrt{16+9}, 0), (-\sqrt{16+9}, 0)$ となるので

$$(5, 0), (-5, 0)$$

となる。

$$(\text{答}) (5, 0), (-5, 0)$$

(1-2)

$\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ から求める方程式は

$$y = \frac{3}{4}x$$

となる。

$$(\text{答}) y = \frac{3}{4}x$$

(1-3)

接点の x 座標を t とおく。

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ に $x=t$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{9t^2}{16} - 9 &= y^2 \\ \Leftrightarrow y &= \pm \frac{3\sqrt{t^2-16}}{4} \end{aligned}$$

となる。よって接点の座標は

$$\left(t, \pm \frac{3\sqrt{t^2-16}}{4}\right)$$

となる。 $\left(t, \frac{3\sqrt{t^2-16}}{4}\right)$ であるとき接線の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{tx}{16} - \frac{\frac{3\sqrt{t^2-16}}{4}y}{9} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{tx}{16} - \frac{3\sqrt{t^2-16}}{36} &= 1 \end{aligned}$$

となる。これと(1-2)で求めた直線

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{4}x \\ \Leftrightarrow 3x - 4y &= 0 \end{aligned}$$

が垂直である条件は

$$\begin{aligned} \frac{t}{16} \cdot 3 - \frac{3\sqrt{t^2-16}}{36} \cdot (-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9t + 16\sqrt{t^2-16} &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となりこれから

$$\begin{aligned} 81t^2 &= 256(t^2-16) \\ \Leftrightarrow 25 \times 7t^2 &= 64^2 \\ \Leftrightarrow t &= \pm \frac{64\sqrt{7}}{35} \end{aligned}$$

となる。ここで①から $t < 0$ となる。よって

$$t = -\frac{64\sqrt{7}}{35}$$

となる。よってこのとき求める接点は

$$\left(-\frac{64\sqrt{7}}{35}, \frac{27\sqrt{7}}{35}\right)$$

となる。 $\left(t, -\frac{3\sqrt{t^2-16}}{4}\right)$ のときについても同様にして求める接点は

$$\left(\frac{64\sqrt{7}}{35}, -\frac{27\sqrt{7}}{35}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \left(-\frac{64\sqrt{7}}{35}, \frac{27\sqrt{7}}{35}\right), \left(\frac{64\sqrt{7}}{35}, -\frac{27\sqrt{7}}{35}\right)$$

(2)

真数条件から $b > 0$ 、底の条件から $a > 0, a \neq 1, b \neq 1$ となる。 a, b は整数であることから

$$a \geq 2, b \geq 2$$

となる。ここで $\log_a b = x$ とおくと $a \geq 2, b \geq 2$ から

$$x > 0$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \log_a b &> \log_b a^4 + 3 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{4}{x} + 3 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 &> 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)(x+1) &> 0 \\ \therefore x &> 4 \end{aligned}$$

となる。 $\log_a b = x, a \geq 2$ であるから

$$b > a^4 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また

$$b < 9a \quad \dots \textcircled{3}$$

である。よって

$$\begin{aligned} a^4 &< 9a \\ \Leftrightarrow a(a^3 - a) &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 &< a < \sqrt[3]{9} \end{aligned}$$

となる。ここで $a \geq 2$ であり a は整数であることから

$$a = 2$$

となる。これと②、③から

$$16 < b < 18$$

となる。 b が整数であることから

$$b = 17$$

となる。

$$(\text{答}) a = 2, b = 17$$

(3)

(3-1)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおく。直線 ℓ 上の2点 $(0, 2), (-2, 0)$ について考える。

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2b \\ 2d \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2a \\ -2c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。2点

$$\begin{pmatrix} 2b \\ 2d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2a \\ -2c \end{pmatrix}$$

は直線 m 上の点となるので直線 m の方程式にこれらを代入すると

$$2b + 2d - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$-2a - 2c - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。次に直線 m 上の点 $(0, 3), (3, 0)$ について考える。

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3b \\ 3d \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3a \\ 3c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これらの2点は ℓ 上の点となるので ℓ の方程式にこれらを代入すると

$$3b - 3d + 2 = 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

$$3a - 3c + 2 = 0 \quad \dots \textcircled{7}$$

となる。④、⑥より

$$b = \frac{5}{12}, d = \frac{13}{12}$$

となる。⑤、⑦より

$$a = -\frac{13}{12}, c = -\frac{5}{12}$$

となる。よって

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{13}{12} & \frac{5}{12} \\ -\frac{5}{12} & \frac{13}{12} \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) A = \begin{pmatrix} -\frac{13}{12} & \frac{5}{12} \\ -\frac{5}{12} & \frac{13}{12} \end{pmatrix}$$

(3-2)

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 169-25 & -65+65 \\ 65-65 & -25+169 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} A^{2013} &= (A^2)^{1006} \cdot A \\ &= A \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{13}{12} & \frac{5}{12} \\ -\frac{5}{12} & \frac{13}{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) A^{2013} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{12} & \frac{5}{12} \\ -\frac{5}{12} & \frac{13}{12} \end{pmatrix}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 y' &= (1-x^2)e^{x^2} + x(-2x)e^{x^2} + x(1-x^2)e^{x^2} \\
 &= (1-x^2-2x^4)e^{x^2} \\
 &= -(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)(x^2+1)e^{x^2}
 \end{aligned}$$

となる。よってこの関数の増減表は下のようになる。

x	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
y'	-	0	+	0	-
y	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって極小値は

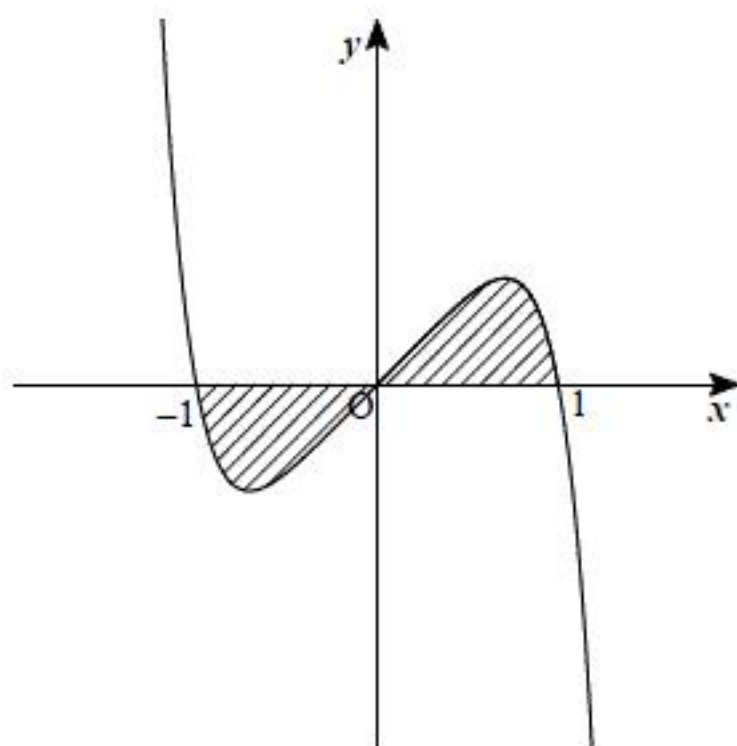
$$\begin{aligned}
 y &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}} \\
 &= -\frac{\sqrt{2e}}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{\sqrt{2e}}{4}$

(2)

(1)の増減表から求める図形の面積は下図の斜線部分となる。



よって求める面積は

$$\int_{-1}^0 -x(1-x^2)e^{x^2} dx + \int_0^1 x(1-x^2)e^{x^2} dx$$

となる。ここで、この関数は奇関数であるため

$$\int_0^1 x(1-x^2)e^{x^2} dx + \int_{-1}^0 x(1-x^2)e^{x^2} dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 -x(1-x^2)e^{x^2} dx = \int_0^1 x(1-x^2)e^{x^2} dx$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^0 -x(1-x^2)e^{x^2} dx + \int_0^1 x(1-x^2)e^{x^2} dx &= 2\int_0^1 x(1-x^2)e^{x^2} dx \\
 &= 2\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 - 2\left[\frac{x^2}{2}e^{x^2}\right]_0^1 + 2\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 \\
 &= e-2
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $e-2$