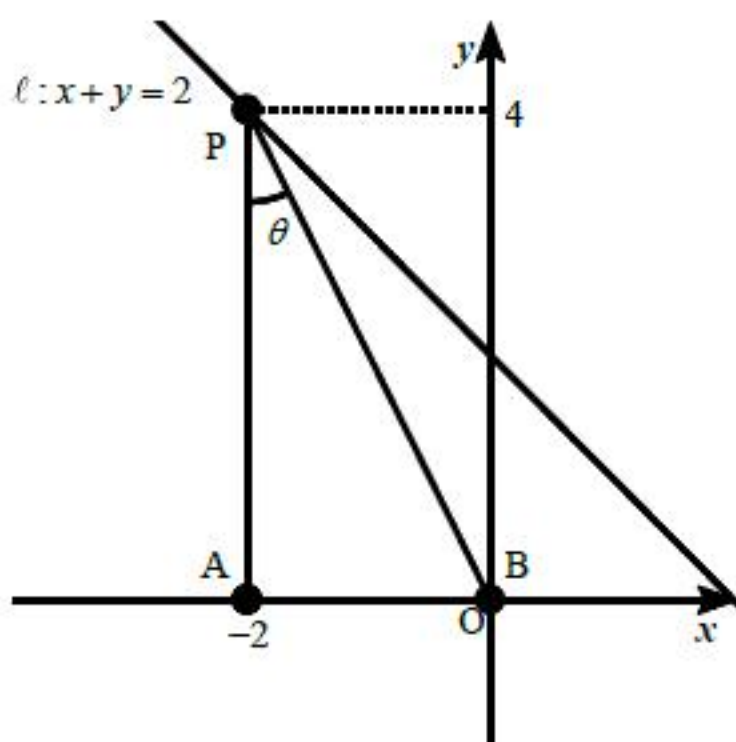


(1)(1-1)

$t = -2$ のとき、各点の位置関係は以下の図のようになる。



このとき点 $P(-2, 4)$ より、 $AP = 4$ 、 $\angle PAB = 90^\circ$ であるから、

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{AB}{PA} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(1-2)

三角関数の定義より、 $\tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1$ であり、 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ であることがわかっているから、

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、 $\overrightarrow{PA}$ 、 $\overrightarrow{PB}$ は

$$\overrightarrow{PA} = (-t-2, t-2), \overrightarrow{PB} = (-t, t-2)$$

と成分表示できるから、内積を考えることで、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|} \\ &= \frac{(-t-2)(-t) + (t-2)(t-2)}{\sqrt{(-t-2)^2 + (t-2)^2} \sqrt{(-t)^2 + (t-2)^2}} \\ &= \frac{t^2 - t + 2}{\sqrt{t^2 + 4} \sqrt{t^2 - 2t + 2}} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

と表せることがわかる。よって①、②より、 $\tan \theta$ は

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{t^2 + 4} \sqrt{t^2 - 2t + 2}}{t^2 - t + 2} \right)^2 - 1} \\ &= \sqrt{\frac{(t^2 + 4)(t^2 - 2t + 2) - (t^2 - t + 2)^2}{(t^2 - t + 2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{t^2 - 4t + 4}{(t^2 - t + 2)^2}} \\ &= \frac{|t-2|}{t^2 - t + 2} \left(\because t^2 - t + 2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \right)\end{aligned}$$

と表せることがわかる。

(答) $\frac{|t-2|}{t^2 - t + 2}$

(2)

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲では $\tan \theta$ は単調増加関数であるから、 θ を最大にする t の値と $\tan \theta$ を最大

にする t の値は一致する。ここで、 $f(t) = \frac{t-2}{t^2 - t + 2}$ おくと

$$\begin{aligned}\tan \theta &= |f(t)| \\ \Leftrightarrow \tan \theta &= \begin{cases} -f(t) & (t \leq 2) \\ f(t) & (t \geq 2) \end{cases}\end{aligned}$$

であり、関数 $f(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{(t-2)'(t^2 - t + 2) - (t-2)(t^2 - t + 2)'}{(t^2 - t + 2)^2} \\ &= \frac{(t^2 - t + 2) - (t-2)(2t-1)}{(t^2 - t + 2)^2} \\ &= -\frac{t(t-4)}{(t^2 - t + 2)^2}\end{aligned}$$

となるから、 t に関する $\tan \theta$ の増減表は以下の表のようになる。

t	...	0	...	2	...	4	...
$\frac{d}{dt}(\tan \theta)$	+	0	-	/	+	0	-
$\tan \theta$	↗	極大	↘	0	↗	極大	↘

ここで、

$$f(0) = \frac{-2}{2} = -1, \quad f(4) = \frac{4-2}{4^2 - 4 + 2} = \frac{1}{7}$$

であるから、 $\tan \theta = |f(t)|$ は $t = 0$ 、すなわち点 $P(0, 2)$ のときに最大値 1 をとることがわかる。

(答) 点 P の座標: $P(0, 2)$ 、 $\tan \theta$ の値: $\tan \theta = 1$

3

(1)(1-1)

まず、8個の球が入っている袋から1個の球を取り出しもとに戻す操作を3回繰り返したとき、その取り出し方は

$$8^3=512 \text{ [通り]}$$

あり、これらは同様に確からしく起こる。

ここから $1 \leq R \leq 7$ の場合について考える。最大の数と最小の数の差が R になるような最小数と最大数の組み合わせは

$$(1, 1+R), \dots, (8-R, 8)$$

の $8-R$ 個であり、 $(n, n+R) (1 \leq n \leq 8-R)$ のときはもうひとつの球の候補として

$$n, n+1, \dots, n+R-1, n+R$$

がありうる。以下、 $(n, n+R)$ となる場合の数を場合分けして考える。

[1] もうひとつの球の候補が n または $n+R$ のとき

球を引く順序を考えることで、それぞれ

$$\frac{3!}{2!1!}=3 \text{ [通り]}$$

あることがわかる。

[2] もうひとつの球の候補が[1]の場合以外のとき

球を引く順序を考えることで、それぞれ

$$3!=6 \text{ [通り]}$$

あることがわかる。

以上[1], [2]より、 $(n, n+R)$ となる場合の数は

$$2 \cdot 3 + \{(n+R-n+1)-2\} \cdot 6 = 6R \text{ [通り]}$$

であるから、結局、最大の数と最小の数の差が R になるような場合の数は

$$6R(8-R) \text{ [通り]}$$

あることがわかる。したがって、最大の数と最小の数の差が R になるような確率は

$$\frac{6R(8-R)}{512} = \frac{3R(8-R)}{256} \quad \dots \text{①}$$

である。特に、 $R=1$ のときは①より

$$\frac{3 \cdot 1 \cdot (8-1)}{256} = \frac{21}{256}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{21}{256}$$

(1-2)

(1-1)の①より、 $R=4$ のとき

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot (8-4)}{256} = \frac{3}{16}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{3}{16}$$

(1-3)

(1-1)の①より、 R の期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{R=0}^7 R \cdot \frac{3R(8-R)}{256} &= \frac{3}{256} \sum_{R=0}^7 (8R^2 - R^3) \\ &= \frac{3}{256} \left\{ 8 \cdot \frac{7(7+1)(7 \cdot 2+1)}{6} - \frac{7^2(7+1)^2}{4} \right\} \\ &= \frac{3}{256} (1120 - 784) \\ &= \frac{63}{16} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \frac{63}{16}$$

(2)

$\log_a 5 = t$ とおくと、

$$\begin{aligned} x^2 + (\log_a 5)x + \log_a a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + (\log_a 5)x + \frac{2}{\log_a 5} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + tx + \frac{2}{t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{4} + \frac{2}{t} &= 0 \quad \dots \text{①} \end{aligned}$$

となる。2次方程式①が相異なる負の解をもつための条件は

$$\begin{cases} \text{放物線の軸に関する条件: } -\frac{t}{2} < 0 & \dots \text{②} \\ \text{頂点の} y \text{ 座標に関する条件: } -\frac{t^2}{4} + \frac{2}{t} < 0 & \dots \text{③} \\ \text{端点に関する条件: } \frac{2}{t} > 0 & \dots \text{④} \end{cases}$$

であるが、②かつ④ $\Leftrightarrow t > 0$ であることから、この条件のもとで

$$\begin{aligned} \text{③} &\Leftrightarrow t^3 > 8 \\ &\Leftrightarrow t > 2 \end{aligned}$$

であることがわかる。したがって、求める条件は

$$\begin{aligned} t > 2 &\Leftrightarrow \log_a 5 > 2 \\ &\Leftrightarrow 1 < a < \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad 1 < a < \sqrt{5}$$

(3)(3-1)

与えられた条件より

$$A = B^2 = (A^2)^2 = A^4 \quad \dots \text{①}$$

であり、 $\det A = a^2 + b^2 > 0$ ($\because b > 0$) より A^{-1} が存在する。したがって、①の両辺に右から A^{-1} をかけることで

$$\begin{aligned} A &= A^4 \\ \Leftrightarrow AA^{-1} &= A^4 A^{-1} \\ \Leftrightarrow E &= A^3 \quad (E \text{ は } 2 \text{ 次の単位行列}) \\ \therefore A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であることがわかる。

$$\text{(答)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3-2)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ より、 A^3 を計算すると

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} a(a^2 - b^2) - 2ab^2 & b(a^2 - b^2) + 2a^2b \\ -2a^2b - b(a^2 - b^2) & -2ab^2 + a(a^2 - b^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。(3-1)より、これが $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に等しいから、

$$\begin{cases} a(a^2 - b^2) - 2ab^2 = 1 & \dots \text{②} \\ b(a^2 - b^2) + 2a^2b = 0 & \dots \text{③} \end{cases}$$

を得る。ここで、 $b > 0$ であることから、③より

$$3a^2 = b^2$$

を満たすことがわかり、これを②に代入することで

$$\begin{aligned} -8a^3 &= 1 \\ \therefore a &= -\frac{1}{2} \\ \therefore b &= \frac{\sqrt{3}}{2} (> 0) \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad a = -\frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4

(1-1)

$1-x=t$ とおき、置換積分を行う。このとき $\frac{dx}{dt}=-1$ であり、 t の値の変化は以下になる。

x	$0 \rightarrow 1$
t	$1 \rightarrow 0$

したがって、与えられた定積分は

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^2 (1-x)^n dx \\ &= \int_1^0 (1-t)^2 t^n \cdot (-1) dt \\ &= \int_0^1 (1-t)^2 t^n dt \\ &= \int_0^1 (t^{n+2} - 2t^{n+1} + t^n) dt \\ &= \left[\frac{1}{n+3} t^{n+3} - \frac{2}{n+2} t^{n+2} + \frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+3} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{n+3} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+1}$$

(1-2)

与えられた級数を変形すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (n+c)(a_n - a_{n+1}) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) + c \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \{(n-1)a_n - na_{n+1} + a_n\} \right) + \lim_{N \rightarrow \infty} c(a_1 - a_{N+1}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(0 \cdot a_1 - Na_{N+1} + \sum_{n=1}^N a_n \right) + ca_1 - c \lim_{N \rightarrow \infty} a_{N+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + ca_1 - \lim_{N \rightarrow \infty} (N+c)a_{N+1} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (N+c)a_{N+1} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{N+c}{N+4} - \frac{2(N+c)}{N+3} + \frac{N+c}{N+2} \right\} \\ &= 1-2+1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (n+c)(a_n - a_{n+1}) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + ca_1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} \right) - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} + ca_1 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+2} \right) - \left(\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+1} \right) \right\} + c \cdot \left(\frac{1}{1+3} - \frac{2}{1+2} + \frac{1}{1+1} \right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{12}c \end{aligned}$$

となる。したがって、題意を満たす実数 c は

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12}c = 2 \Leftrightarrow c = 22$$

と求まる。

(答) 22

(2)

$2x+y$ と $2x-y$ の値により以下の4つのケースに場合分けする。

[1] $2x+y \geq 0$ かつ $2x-y \geq 0$ のとき

$2x+y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -2x$ および $2x-y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 2x$ より、つまり $-2x \leq y \leq 2x$ のとき

$$\begin{aligned} |2x+y| + |2x-y| &= 2 \\ \Leftrightarrow 2x+y+2x-y &= 2 \\ \Leftrightarrow 4x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $x = \frac{1}{2}$ かつ $-1 \leq y \leq 1$ である。

[2] $2x+y \geq 0$ かつ $2x-y < 0$ のとき

$2x+y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}y$ および $2x-y < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}y$ より、つまり $-\frac{1}{2}y \leq x < \frac{1}{2}y$ のとき

$$\begin{aligned} |2x+y| + |2x-y| &= 2 \\ \Leftrightarrow 2x+y-2x+y &= 2 \\ \Leftrightarrow 2y &= 2 \\ \Leftrightarrow y &= 1 \end{aligned}$$

であるから、 $y = 1$ かつ $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ である。

[3] $2x+y < 0$ かつ $2x-y \geq 0$ のとき

$2x+y < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}y$ および $2x-y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}y$ より、つまり $\frac{1}{2}y \leq x < -\frac{1}{2}y$ のとき

$$\begin{aligned} |2x+y| + |2x-y| &= 2 \\ \Leftrightarrow -2x-y+2x-y &= 2 \\ \Leftrightarrow -2y &= 2 \\ \Leftrightarrow y &= -1 \end{aligned}$$

であるから、 $y = -1$ かつ $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ である。

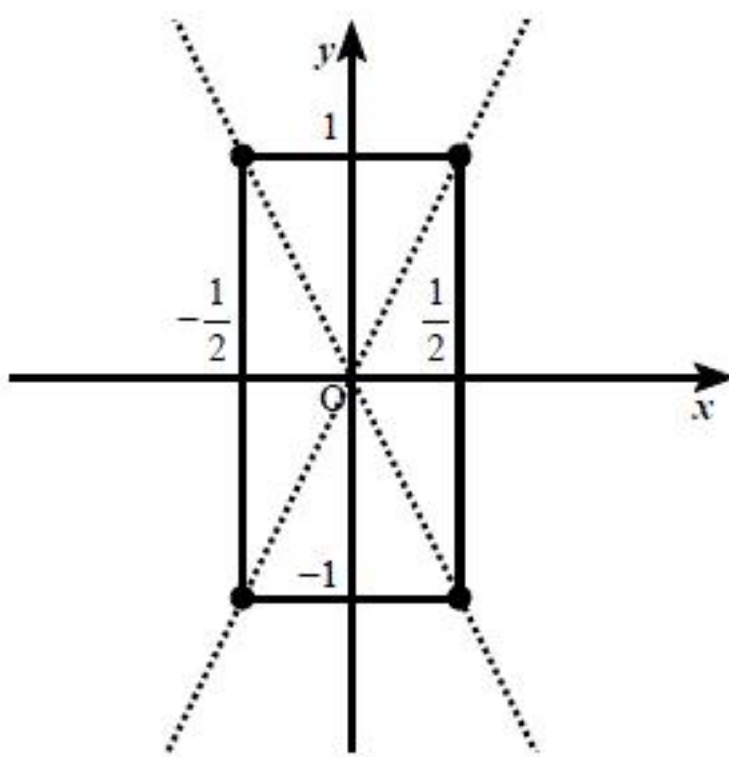
[4] $2x+y < 0$ かつ $2x-y < 0$ のとき

$2x+y < 0 \Leftrightarrow y < -2x$ および $2x-y < 0 \Leftrightarrow y > 2x$ より、つまり $2x < y < -2x$ のとき

$$\begin{aligned} |2x+y| + |2x-y| &= 2 \\ \Leftrightarrow -2x-y-2x+y &= 2 \\ \Leftrightarrow -4x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $x = -\frac{1}{2}$ かつ $-1 < y < 1$ である。

以上[1]~[4]より、 $|2x+y| + |2x-y| = 2$ のグラフは以下の図の実線部のようになることがわかる。



(答) 前図