

(1)

1回の試行で赤玉が出る確率は $\frac{1}{10}$ ，白玉が出る確率は $\frac{9}{10}$ であるから，10回の試行で赤玉が

8個出る確率は

$${}_{10}C_8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{9^2}{2 \cdot 10^9}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{9^2}{2 \cdot 10^9}$$

(2)

1回の試行で赤玉が出る確率は $\frac{1}{n}$ ，白玉が出る確率は $\frac{n-1}{n}$ であるから， n 回の試行で赤玉が

8個出る確率は

$$\begin{aligned} P_n &= {}_n C_8 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^8 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-8} \\ &= \frac{n!(n-1)^{n-8}}{8!(n-8)!n^8} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P_n = \frac{n!(n-1)^{n-8}}{8!(n-8)!n^8}$$

(3)

(2)より

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{n!(n-1)^{n-8}}{8!(n-8)!n^8} \\ &= \frac{1}{8!} \cdot \frac{n!}{(n-8)!(n-1)^8} \cdot \frac{(n-1)^8}{n^8} \\ &= \frac{1}{8!} \cdot \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{7}{n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^8} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n} \right\}^{-1} \\ &\rightarrow \frac{1}{8!e} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が導かれる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{8!e}$$

2

(1)

(1-1)

$$\vec{d} = \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{d} &= \vec{a} \cdot \left(\vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \right) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \cdot \vec{a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$

(1-2)

$$\vec{e} = \vec{c} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \vec{a} - \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}|^2} \vec{d} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \vec{d} &= \left(\vec{c} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \vec{a} - \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}|^2} \vec{d} \right) \cdot \vec{d} \\ &= \vec{c} \cdot \vec{d} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \vec{a} \cdot \vec{d} - \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}|^2} \vec{d} \cdot \vec{d} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\vec{e} \cdot \vec{d} = 0$

(2)

線分 AC の中点と線分 BD の中点が一致すればいいので、点 D を表す複素数を z とすると

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + \gamma}{2} &= \frac{\beta + z}{2} \\ \Leftrightarrow z &= \alpha + \gamma - \beta \\ \therefore z &= -3 + 6i \end{aligned}$$

となる。

(答) $-3 + 6i$

(3)

(3-1)

第 k 項は

$$\begin{aligned} 10^0 + 10^1 + \cdots + 10^{k-1} &= \frac{1 \cdot (10^k - 1)}{10 - 1} \\ &= \frac{1}{9} (10^k - 1) \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{9} (10^k - 1)$

(3-2)

(3-1)より、初項から第 n 項までの和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{9} (10^k - 1) \right\} &= \frac{1}{9} \left\{ \frac{10 \cdot (10^n - 1)}{10 - 1} - n \right\} \\ &= \frac{1}{81} (10^{n+1} - 9n - 10) \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{81} (10^{n+1} - 9n - 10)$

3

(1)

(1-1)

2016 を素因数分解すると

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$$

となるので、約数の個数は

$$(5+1)(2+1)(1+1) = 36$$

である。

(答) 36 個

(1-2)

素因数分解の結果より、約数の総和は

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)(3^0 + 3^1 + 3^2)(7^0 + 7^1) = 6552$$

である。

(答) 6552

(2)

与式を変形すると

$$\log_3 \left(a + \frac{3}{b} \right) + \log_3 \left(b + \frac{3}{a} \right) = \log_3 \left(ab + \frac{9}{ab} + 6 \right)$$

となる。ここで、対数の底が1より大きいことと $ab > 0$, $\frac{9}{ab} > 0$ より相加相乗平均から

$$\begin{aligned} \log_3 \left(ab + \frac{9}{ab} + 6 \right) &\geq \log_3 \left(2\sqrt{ab \cdot \frac{9}{ab}} + 6 \right) \\ &= \log_3 12 \\ &= 1 + 2\log_3 2 \end{aligned}$$

となる。等号成立は

$$\begin{aligned} ab &= \frac{9}{ab} \\ \therefore ab &= 3 \end{aligned}$$

のときであり、最小値は $1 + 2\log_3 2$ である。

(答) $1 + 2\log_3 2$

(3)

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \frac{4}{9} \\ \Leftrightarrow 2\sin \theta \cos \theta + 1 &= \frac{4}{9} \\ \therefore \sin \theta \cos \theta &= -\frac{5}{18} \end{aligned}$$

となる。 $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ の範囲で $\cos \theta - \sin \theta > 0$ であるから

$$\begin{aligned} (\cos \theta - \sin \theta)^2 &= (\cos \theta + \sin \theta)^2 - 4\cos \theta \sin \theta \\ &= \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{5}{18} \right) \\ &= \frac{14}{9} \\ \therefore \cos \theta - \sin \theta &= \frac{\sqrt{14}}{3} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta - \sin^3 \theta &= (\cos \theta - \sin \theta)(\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \frac{\sqrt{14}}{3} \cdot \left\{ 1 + \left(-\frac{5}{18} \right) \right\} \\ &= \frac{13}{54} \sqrt{14} \end{aligned}$$

と導かれる。

(答) $\frac{13}{54} \sqrt{14}$

(4)

$$\begin{aligned} \sin 3x + \sin 2x + \sin x &= 3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x \cos x + \sin x \\ &= \sin x (4 - 4\sin^2 x + 2\cos x) \\ &= 2\sin x \cos x (2\cos x + 1) \end{aligned}$$

であるから

$$|\sin 3x + \sin 2x + \sin x| = \begin{cases} \sin 3x + \sin 2x + \sin x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi) \\ -(\sin 3x + \sin 2x + \sin x) & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}) \end{cases}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |\sin 3x + \sin 2x + \sin x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3x + \sin 2x + \sin x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin 3x + \sin 2x + \sin x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{2\pi}{3}}^\pi (\sin 3x + \sin 2x + \sin x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \\ &\quad + \left[-\frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x \right]_{\frac{2\pi}{3}}^\pi \\ &= \frac{17}{6} \end{aligned}$$

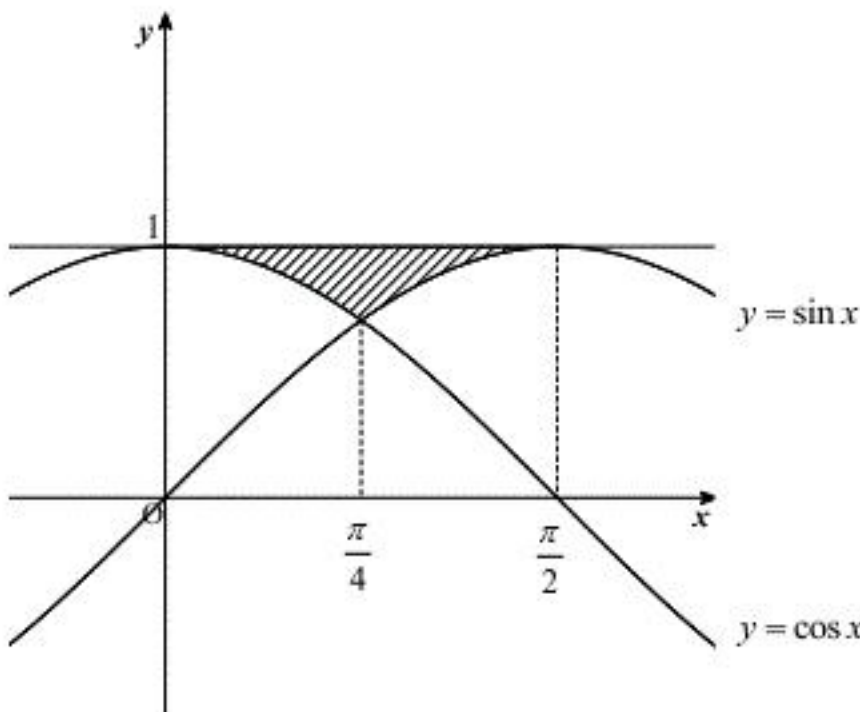
が得られる。

(答) $\frac{17}{6}$

4

(1)

(1-1)



囲まれた部分の図形は $x = \frac{\pi}{4}$ に関して対称なので

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos x) dx \\ &= 2 \left[x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$

(1-2)

(1-1)と同様に対称性から

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos x)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - 2\cos x + \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2} - 2\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{3}{2}x - 2\sin x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} (3\pi - 8\sqrt{2} + 2) \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $V = \frac{\pi}{4} (3\pi - 8\sqrt{2} + 2)$

(2)

動点 P を $(t, t^2 - 2)$ として、点 P と点 $(1, 0)$ の距離を d とすると

$$\begin{aligned} d^2 &= (t - 1)^2 + (t^2 - 2 - 0)^2 \\ &= t^4 - 3t^2 - 2t + 5 \end{aligned}$$

となる。 $f(t) = t^4 - 3t^2 - 2t + 5$ として、 t で微分すると

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4t^3 - 6t - 2 \\ &= 2(t + 1)(2t^2 - 2t - 1) \end{aligned}$$

であるから、 $f'(t) = 0$ の解は

$$t = -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

となる。これより、増減表は以下のようになる。

t	...	-1	...	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	...	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

ここで、 $\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 - 2\alpha - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 &= \alpha + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^4 - 3\alpha^2 - 2\alpha + 5 \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)^2 - 3\alpha^2 - 2\alpha + 5 \\ &= -2\alpha^2 - \alpha + \frac{21}{4} \\ &= -2 \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) - \alpha + \frac{21}{4} \\ &= -3\alpha + \frac{17}{4} \\ &= \frac{11 - 6\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$f(-1) = 5$$

となることから、 $f(\alpha) < f(-1)$ より最小値は $f(\alpha)$ である。 $f(t)$ が最小になるとき d も最小になる。よって点 P の座標は

$$\begin{aligned} \left(\alpha, \alpha^2 - 2 \right) &= \left(\alpha, \alpha - \frac{3}{2} \right) \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-2+\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

である。

(答) $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-2+\sqrt{3}}{2} \right)$