

【解答】

(1)	(1-1)	1	
	(1-2)	①	②
		-1	0
(2)	$\vec{c}=\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left \vec{a}\right ^2}\vec{a}$		
(3)	$f^{-1}(x)=\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\quad(x\geq 1)$		

【解説】

(1)

(1-1)

n が 2 以上の整数のとき、 $\xi=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ より、ド・モアブルの定理を用いて

$$\xi^n=1$$

である。これと $\xi\neq 1$ から

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n\xi^k&=\sum_{k=0}^{n-1}\xi^k+\xi^n\\&=\frac{\xi^n-1}{\xi-1}+\xi^n\\&=0+1\\&=1\end{aligned}$$

と求まる。

(1-2)

(1-1)より

$$\sum_{k=0}^{n-1}\xi^k=0$$

であり

$$\xi^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

と表せる。 $\cos\frac{2k\pi}{n},\sin\frac{2k\pi}{n}$ は実数であるから

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}=0,\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

となる。ここで、 $\cos 0=1,\sin 0=0$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}&=0\\&\Leftrightarrow\cos 0+\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}=0\\&\therefore\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}=-1\\&\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}=0\\&\Leftrightarrow\sin 0+\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}=0\\&\therefore\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}=0\end{aligned}$$

と求まる。

(2)

$\vec{a_1}$ は $\vec{a}$ と平行なベクトルであるから、実数 t を用いて

$$\vec{a_1}=t\vec{a}$$

と表せる。このとき

$$\vec{b}=\vec{a_1}+\vec{c}\Leftrightarrow\vec{c}=\vec{b}-t\vec{a}$$

となる。いま $\vec{a}$ と $\vec{c}$ は垂直であるから

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{c}&=0\\&\Leftrightarrow\vec{a}\left(\vec{b}-t\vec{a}\right)=0\\&\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}-t\left|\vec{a}\right|^2=0\\&\therefore t=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\vec{c}=\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2}\vec{a}$$

と求まる。

(3)

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{3^x+3^{-x}}{2}\text{ より、}x\text{ で微分すると}\\f'(x)&=\frac{\log 3}{2}\left(3^x-3^{-x}\right)\end{aligned}$$

となる。 $x>0$ のとき、 $3^x>3^{-x}$ であるから $f'(x)>0$ となる。よって $f(x)$ は $x>0$ において単調増加である。ここで

$$f(0)=1,\lim_{x\rightarrow\infty}f(x)=\infty$$

であるから、 $f(x)$ の値域は 1 以上の実数全体である。いま、 $f(x)=y$ とおくと

$$\begin{aligned}y&=\frac{3^x+3^{-x}}{2}\\&\Leftrightarrow 3^{2x}-2y\cdot 3^x+1=0\\&\Leftrightarrow\left\{3^x-\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\right\}\left\{3^x-\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)\right\}=0\end{aligned}$$

と表せる。ここで

$$\begin{aligned}\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)&=1\\y+\sqrt{y^2-1}&\geq 1\end{aligned}$$

より $y-\sqrt{y^2-1}\leq 1$ となる。 $x\geq 0$ のとき $3^x\geq 1$ であるから、 $3^x-\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)=0$ は常には成り立たない。よって

$$\begin{aligned}3^x-\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)&=0\\&\Leftrightarrow 3^x=y+\sqrt{y^2-1}\\&\therefore x=\log_3\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\end{aligned}$$

となる。ゆえに $f(x)$ の逆関数は

$$f^{-1}(x)=\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\quad(x\geq 1)$$

と求まる。

【解答】

(1)	$P(M_4=0)=\frac{3}{8}, P(M_4=1)=\frac{1}{4}, P(M_4=2)=\frac{1}{4}, P(M_4=3)=\frac{1}{16}, P(M_4=4)=\frac{1}{16}$
(2)	$P(T_4=0)=\frac{3}{8}, P(T_4=1)=\frac{1}{4}, P(T_4=2)=\frac{1}{4}, P(T_4=3)=\frac{1}{16}, P(T_4=4)=\frac{1}{16}$

(3)

(1)の表で示した事象を上から順に $E_1, E_2, \dots, E_{16}$ とする。これらの事象それぞれについて5回目の賭けにより M_5, T_5 の値がどうなるのかは以下の表のようになる。(5回目の賭けで1万円獲得した場合を左側, 損失した場合を右側に記した。)

	E_1		E_2		E_3		E_4		E_5		E_6		E_7		E_8	
M_5	5	4	3	3	3	2	3	2	3	2	2	2	1	1	1	1
T_5	1	1	1	1	1	1	3	3	1	1	3	2	5	4	3	2

	E_9		E_{10}		E_{11}		E_{12}		E_{13}		E_{14}		E_{15}		E_{16}	
M_5	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
T_5	3	2	1	0	1	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0

上の表より

$$P(M_5=0)=P(T_5=0)=\frac{5}{16}$$

$$P(M_5=1)=P(T_5=1)=\frac{5}{16}$$

$$P(M_5=2)=P(T_5=2)=\frac{5}{32}$$

$$P(M_5=3)=P(T_5=3)=\frac{5}{32}$$

$$P(M_5=4)=P(T_5=4)=\frac{1}{32}$$

$$P(M_5=5)=P(T_5=5)=\frac{1}{32}$$

であることが分かる。よって、任意の k で

$$P(M_5=k)=P(T_5=k)$$

が成り立つ。

(答) $P(M_5=k)=P(T_5=k)$

【解説】

(1)

n 回賭けを行ったときの損益額の変動の仕方 2^n 通りは同様に確からしい。 $n=4$ のとき Z_i ($0 \leq i \leq 4$) と M_4, T_4 の関係は以下の表のようになる。

$(Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$	M_4	T_4
$(0, 1, 2, 3, 4)$	4	1
$(0, 1, 2, 3, 2)$	3	1
$(0, 1, 2, 1, 2)$	2	1
$(0, 1, 0, 1, 2)$	2	3
$(0, -1, 0, 1, 2)$	2	1
$(0, 1, 2, 1, 0)$	2	2
$(0, 1, 0, 1, 0)$	1	4
$(0, -1, 0, 1, 0)$	1	2
$(0, 1, 0, -1, 0)$	1	2
$(0, -1, 0, -1, 0)$	0	0
$(0, -1, -2, -1, 0)$	0	0
$(0, 1, 0, -1, -2)$	1	2
$(0, -1, 0, -1, -2)$	0	0
$(0, -1, -2, -1, -2)$	0	0
$(0, -1, -2, -3, -2)$	0	0
$(0, -1, -2, -3, -4)$	0	0

上の表より

$$P(M_4=0)=\frac{3}{8}, P(M_4=1)=\frac{1}{4}, P(M_4=2)=\frac{1}{4}, P(M_4=3)=\frac{1}{16}, P(M_4=4)=\frac{1}{16}$$

と求まる。

(2)

(1)の表より

$$P(T_4=0)=\frac{3}{8}, P(T_4=1)=\frac{1}{4}, P(T_4=2)=\frac{1}{4}, P(T_4=3)=\frac{1}{16}, P(T_4=4)=\frac{1}{16}$$

と求まる。

【解答】

(1)	(1-1)	(1-2)
	$a_5 = 1$	$a_{2017} = 2017$
(2)	(2-1)	(2-2)
	$\frac{20}{7}$	$\frac{20}{49}$

【解説】

(1)

(1-1)

2016 = a とおくと, $a_1 = 2016, a_2 = 2017$ より

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1+a_2}{a_1} \\ &= 1+\frac{2}{a} \\ a_4 &= \frac{1+a_3}{a_2} \\ &= \frac{1+\left(1+\frac{2}{a}\right)}{a+1} \\ &= \frac{2}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{1+a_4}{a_3} \\ &= \frac{1+\frac{2}{a}}{1+\frac{2}{a}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

と求まる。

(1-2)

(1-1)と同様にして a_6, a_7 を求めると

$$\begin{aligned} a_6 &= \frac{1+a_5}{a_4} \\ &= \frac{1+1}{\frac{2}{a}} \\ &= a \\ a_7 &= \frac{1+a_6}{a_5} \\ &= \frac{1+a}{1} \\ &= 1+a \end{aligned}$$

となる。 $a_1 = 1, a_2 = a+1$ と漸化式から, $\{a_n\}$ は周期5の周期数列であると分かる。ここで

$$2017 = 5 \cdot 403 + 2$$

であるから

$$\begin{aligned} a_{2017} &= a_2 \\ &= 2017 \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

(2-1)

Xの取り得る値は2, 3, 4である。X = 2となる確率は

$$\frac{{}_5C_2 \cdot {}_2C_2}{{}_7C_4} = \frac{2}{7}$$

であり, X = 3となる確率は

$$\frac{{}_5C_3 \cdot {}_2C_1}{{}_7C_4} = \frac{4}{7}$$

である。また, X = 4となる確率は

$$\frac{{}_5C_4}{{}_7C_4} = \frac{1}{7}$$

である。よって, Xの平均値(期待値)は

$$2 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{4}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7} = \frac{20}{7}$$

と求まる。

(2-2)

(1)より, X²の平均値(期待値)は

$$2^2 \cdot \frac{2}{7} + 3^2 \cdot \frac{4}{7} + 4^2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{60}{7}$$

である。よって, Xの分散は

$$\frac{60}{7} - \left(\frac{20}{7}\right)^2 = \frac{20}{49}$$

と求まる。

【解答】

(1)	29
(2)	5
(3)	$\frac{1}{5}$
(4)	$\pi-1$
(5)	$\frac{2}{3}(7\sqrt{7}-8)+2\sqrt{3}$

【解説】

(1)

$a+b=1, a^2+b^2=3$ より

$$ab=\frac{1}{2}\left\{\left(a+b\right)^2-\left(a^2+b^2\right)\right\}$$

$$=-1$$

である。ここで、任意の自然数 n について

$$a^{n+2}+b^{n+2}=\left(a+b\right)\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)-ab\left(a^n+b^n\right)$$

$$=\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)+\left(a^n+b^n\right)$$

が成り立つ。よって

$$a^3+b^3=1+3$$

$$=4$$

$$a^4+b^4=3+4$$

$$=7$$

$$a^5+b^5=4+7$$

$$=11$$

$$a^6+b^6=7+11$$

$$=18$$

$$a^7+b^7=11+18$$

$$=29$$

と求まる。

(2)

$\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{k^2}}$ を変形すると

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{k^2}}=\frac{\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}}{\left\{\sqrt[3]{(k+1)^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{k^2}\right\}\left(\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}\right)}$$

$$=\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}$$

と表せるから、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{215}\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{k^2}}&=\sum_{k=1}^{215}\left(\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}\right)\\&=\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{1}\right)+\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt[3]{216}-\sqrt[3]{215}\right)\\&=\sqrt[3]{216}-\sqrt[3]{1}\\&=6-1\\&=5\end{aligned}$$

と求まる。

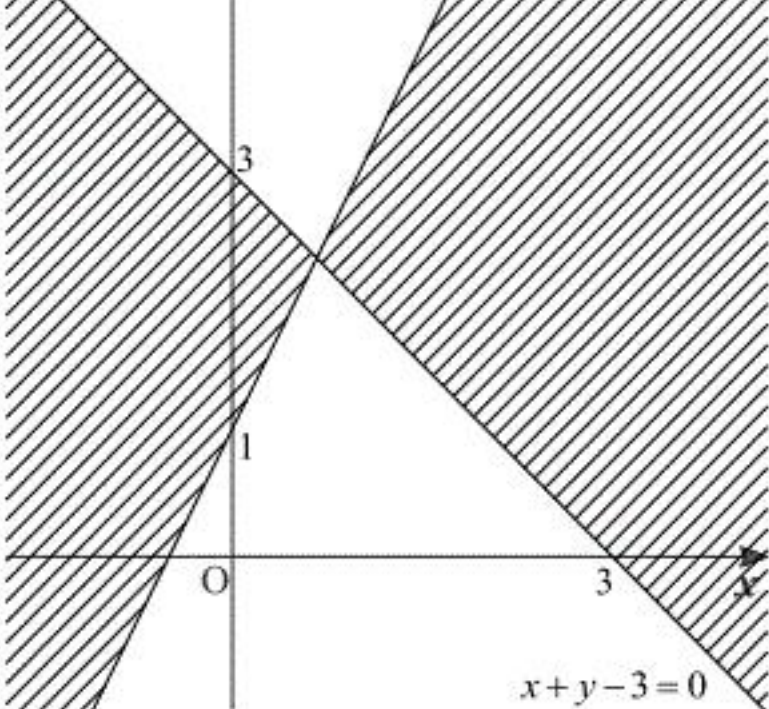
(3)

不等式を変形すると

$$2x^2+xy-5x-y^2+4y-3\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-y+1)(x+y-3)\geq 0$$

となるから、点 (x, y) の存在範囲は以下の図の斜線部分である。(ただし、境界を含む。)



ここで $x^2+y^2=r^2$ ($r>0$) とおくと、これは中心 $(0, 0)$ 、半径 r の円を表す。 x^2+y^2 が r^2 という値をとるためには、この円と上図の斜線部分が共有点を持つことが必要十分である。上図より、 x^2+y^2 が最小値 r_0^2 をとるのは $x^2+y^2=r_0^2$ と $2x-y+1=0$ が接するときである。 r_0^2 は原点と $2x-y+1=0$ との距離の2乗に等しいから

$$r_0^2=\left\{\frac{\left|2\cdot 0+(-1)\cdot 0+1\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{5}$$

と求まる。

(4)

$f(x)=x+a\cos x$ より、 x で微分すると

$$f'(x)=1-a\sin x$$

となる。 $a>1$ であるから $0<x<2\pi$ において $f'(x)=0$ となる x が2つ存在する。このような x

のうち小さい方を α $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ とすると、もう一方は $\pi-\alpha$ である。 $f(x)$ の $0<x<2\pi$ における増減は以下の表のようになる。

x	0	...	α	...	$\pi-\alpha$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$			極大		極小		

$f(x)$ は極小値1をとるから

$$f(\pi-\alpha)=1$$

$$\Leftrightarrow (\pi-\alpha)+a\cos(\pi-\alpha)=1$$

$$\Leftrightarrow \pi-\alpha+a\cos\alpha=1$$

$$\Leftrightarrow \alpha+a\cos\alpha=\pi-1$$

となる。ゆえに、極大値は

$$f(\alpha)=\alpha+a\cos\alpha$$

$$=\pi-1$$

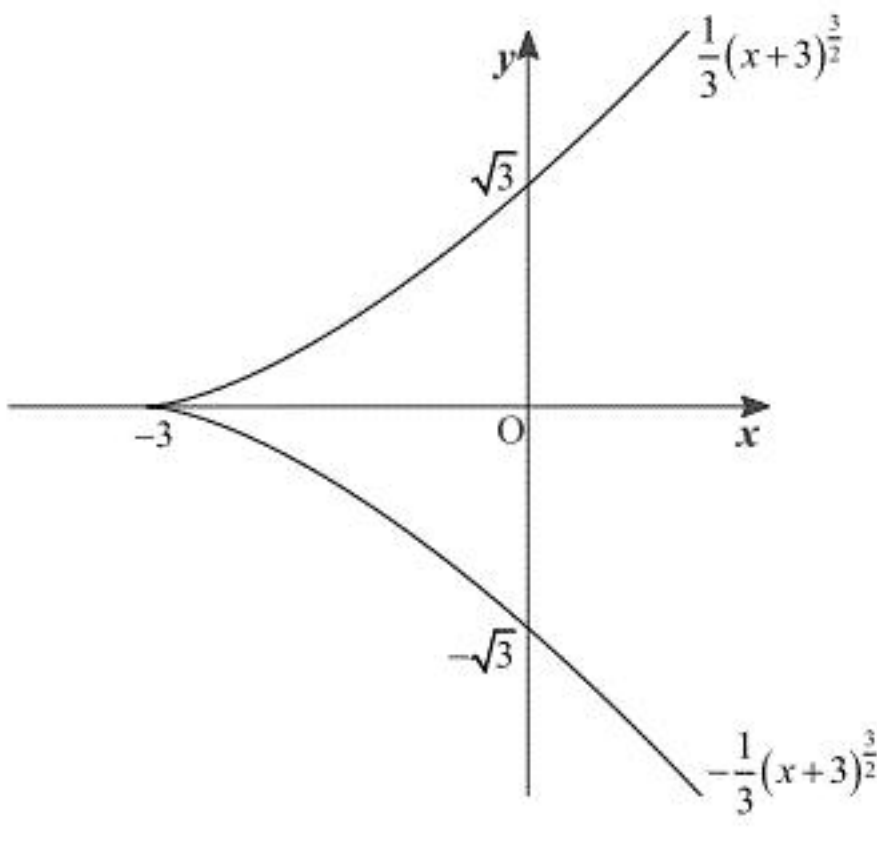
と求まる。

(5)

$9y^2=(x+3)^3$ の左辺は0以上であるから、 $x\geq -3$ である。ここで

$$9y^2=(x+3)^3\Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}$$

となり、この曲線の概形は以下の図のようになる。



$f(x)=\frac{1}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}$ とおく。 $f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x+3}$$

である。曲線は x 軸対称であるから、上図より求める図形の周の長さは

$$\begin{aligned}2\left(\int_{-3}^0\sqrt{1+\left\{f'(x)\right\}^2}dx+\sqrt{3}\right)&=2\int_{-3}^0\sqrt{1+\frac{x+3}{4}}dx+2\sqrt{3}\\&=2\int_{-3}^0\sqrt{x+7}dx+2\sqrt{3}\\&=\left[\frac{2}{3}(x+7)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^0+2\sqrt{3}\\&=\frac{2}{3}(7\sqrt{7}-8)+2\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。