

〔解答〕

(1)	(2)	(3)	(4)
$\frac{\pi}{3}$	$t = -\frac{1}{4}, \sqrt{3}$	$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 16t^2 + 4t$	4 倍

〔解説〕

(1)

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が成す角を θ とすると, $|\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} + (-1) \cdot 2 = 4$ であるから,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となり, $0 \leq \theta \leq \pi$ から $\theta = \frac{\pi}{3}$ とわかる。

(2)

$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$ であるから,

$$\begin{aligned}|\vec{p}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= 16t^2 + 8t + 4 \\ &= 16\left\{\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right\}\end{aligned}$$

となる。よって, $t = -\frac{1}{4}$ で $|\vec{p}|^2$ は最小値 3 をとるから, $|\vec{p}|$ は $t = -\frac{1}{4}$ で最小値 $\sqrt{3}$ をとるとわかる。

(3)

$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + t\vec{b}$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t\vec{b}$ であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} &= t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= 16t^2 + 4t\end{aligned}$$

となる。

(4)

$t = -\frac{1}{4}$ のとき, $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $|\vec{p}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{p} = 3$ であるから, このとき, それぞれの三角形の面積は,

$$\begin{aligned}\triangle OAB &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot 16 - 4^2} \\ &= 2\sqrt{3} \\ \triangle OAP &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{p}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{p})^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot 3 - 3^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって, $\triangle OAB$ の面積は, $\triangle OAP$ の面積の 4 倍となる。

〔解答〕

(1)	(2)
$z = \sqrt{3} + i$	$(p, q) = (3, 6)$

〔解説〕

(1)

z を, $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ なる r, θ を用いて, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおく。 $|r^4| = |z^4| = 16$ であるか

ら, $r = 2$ となる。したがって, $z^4 = 16 \cos 4\theta + 16i \sin 4\theta$ となるので,

$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i = 16 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$ と比較して, $0 \leq 4\theta < 8\pi$ より,

$$4\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \frac{14}{3}\pi, \frac{20}{3}\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

が得られる。この中で, 実数部分が最大となるのは $\theta = \frac{1}{6}\pi$ のときであり, このとき,

$z = \sqrt{3} + i$ となる。

(2)

$z_1 = 2 \left(\cos \frac{1}{6}\pi + i \sin \frac{1}{6}\pi \right), 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)$ であるから,

$$z_1^p = (1 - i)^q$$

$$\Leftrightarrow 2^p \left(\cos \frac{p}{6}\pi + i \sin \frac{p}{6}\pi \right) = \sqrt{2}^q \left(\cos \frac{7q}{4}\pi + i \sin \frac{7q}{4}\pi \right)$$

となる。よって, 整数 m を用いて,

$$2p = q, \frac{p}{6}\pi = \frac{7q}{4}\pi + 2m\pi$$

$$\Leftrightarrow 2p = q, 2p = 21q + 24m$$

と書ける。これを満たす最小の (p, q) は, $p = 1, 2, 3, \dots$ と試すことにより, $(p, q) = (3, 6)$ となる。

(答) $(p, q) = (3, 6)$

【解答】

(1)	(2)
24	324
(3)	(4)
$6\sqrt{3}$	19
(5-1)	(5-2)
$\frac{102}{455}$	$\frac{265}{91}$

【解説】

(1) 合同式を用いて考える。以下の合同式では、100 を法とする。

$$\begin{aligned} 2018 &\equiv 18 \\ 2018^2 &\equiv 18 \cdot 18 \equiv 24 \\ 2018^3 &\equiv 18 \cdot 24 \equiv 32 \\ 2018^4 &\equiv 18 \cdot 32 \equiv 76 \\ 2018^5 &\equiv 18 \cdot 76 \equiv 68 \\ 2018^6 &\equiv 18 \cdot 68 \equiv 24 \end{aligned}$$

となり、周期的に循環するから、
 $2018^{2018} \equiv 2018^{4 \times 504 + 2} \equiv 24$

が得られる。したがって、 2018^{2018} の下 2 桁は 24 となる。

(2)

$\left(3x^3 + \frac{1}{x}\right)^9$ の展開式の一般項は、 ${}_9C_r \cdot (3x^3)^r \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{9-r} = 3^r \cdot {}_9C_r \cdot x^{4r-9}$ である。今、 $\frac{1}{x}$ の係数を
知りたいので、 $4r - 9 = -1$ として、これを解くと、 $r = 2$ が得られる。これを代入して、求める係
数は、

$$3^2 \cdot {}_9C_2 = 9 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 324$$

となる。

(3)

真数条件より、 $x > 0, y > 0$ である。

$$\begin{aligned} \log_3 x + \log_3 y &= 2 \\ \Leftrightarrow \log_3 xy &= 2 \\ \Leftrightarrow xy &= 3^2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{9}{x} \end{aligned}$$

となるので、これを代入して、相加相乗平均の関係を用いると、

$$3x + y = 3x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{3x \cdot \frac{9}{x}} = 6\sqrt{3}$$

となり、等号成立は $x = \sqrt{3}$ のときに限る。このとき $y = 3\sqrt{3}$ であるので、 $3x + y$ は、

$$(x, y) = (\sqrt{3}, 3\sqrt{3}) \text{ で最小値 } 6\sqrt{3} \text{ をとることが示された。}$$

(4)

これらのデータを小さい順に並べなおすと、

$$\{23, 31, 35, 37, 49, 57, 60, 67, 73, 81, 92\}$$

となるので、第 1 四分位数は 35、第 3 四分位数は 73 であるとわかる。したがって、四分位偏差
は、

$$\frac{73 - 35}{2} = 19$$

となる。

(5-1)

4 種類の球の中から 2 種類を選ぶ方法は ${}_4C_2 = 6$ 通りある。出る色を仮に X, Y とし、それぞ
れの球が出る回数を (x, y) で表すことにすると、 $(x, y) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$ の 3 パターンの出方
がある。それぞれの球の出方の組み合わせを足すと、 ${}_4C_1 \cdot {}_4C_3 + {}_4C_2 \cdot {}_4C_2 + {}_4C_3 \cdot {}_4C_1 = 68$ 通り
あるので、求める確率は、

$$\frac{6 \cdot 68}{{}_{16}C_4} = \frac{102}{455}$$

となる。

(5-2)

(5-1) と同様に考えると、1 種類の球しか出ない確率は、

$$\frac{{}_4C_1 \cdot {}_4C_4}{{}_{16}C_4} = \frac{1}{455}$$

であり、4 種類すべての球が出る確率は、

$$\frac{{}_4C_4 \cdot ({}_4C_1)^4}{{}_{16}C_4} = \frac{64}{455}$$

であるので、3 種類の球が出る確率は、余事象を考えることにより、

$$1 - \left(\frac{1}{455} + \frac{102}{455} + \frac{64}{455} \right) = \frac{288}{455}$$

となる。よって、求める期待値は、

$$1 \times \frac{1}{455} + 2 \times \frac{102}{455} + 3 \times \frac{288}{455} + 4 \times \frac{64}{455} = \frac{265}{91}$$

となる。

【解答】

(1)	(2)	(3)
$\frac{1}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{18\sqrt{3}}{5}$

【解説】

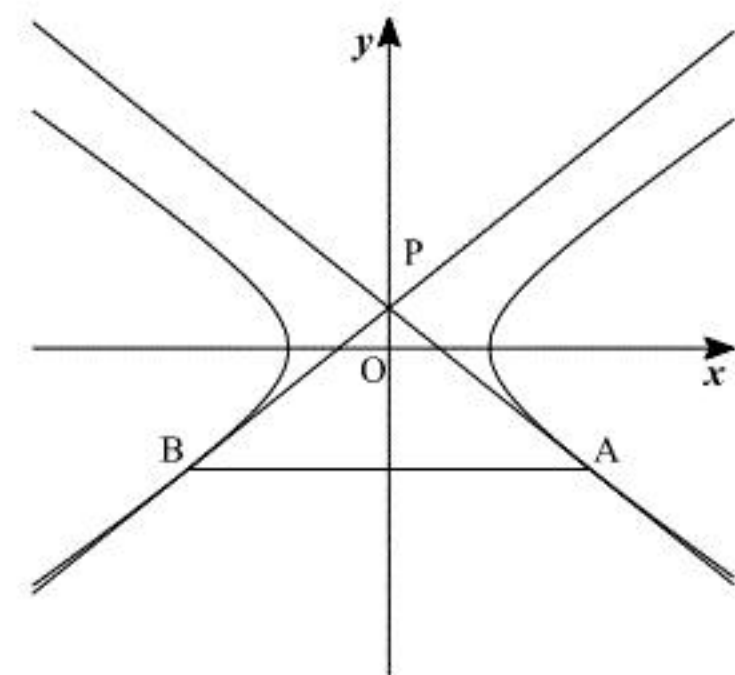
(1)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{n}}{n+k} \right)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx \\ &= - \left[\frac{1}{1+x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(2)

x 軸について対称であるから、 $t > 0$ のときについてのみ考える。



上図のように A, B を定め、 $A = (x_0, y_0)$, $B = (-x_0, y_0)$ とする。A における接線の方程式は、 $x_0 x - y_0 y = 1$ となり、これが $P = (0, t)$ を通ることから、

$$\begin{aligned}-ty_0 &= 1 \\ \therefore y_0 &= -\frac{1}{t} \quad (\because t > 0)\end{aligned}$$

が得られる。これを、 $x_0^2 - y_0^2 = 1$ に代入して計算すると、 $x_0 = \pm \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t}$ となるので、

$$A = \left(\frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t}, -\frac{1}{t} \right), B = \left(-\frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t}, -\frac{1}{t} \right) \text{ として一般性を失わない。これより、} \triangle PAB \text{ の面積}$$

$S(t)$ は、

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t} - \left(-\frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t} \right) \right\} \cdot \left\{ t - \left(-\frac{1}{t} \right) \right\} \\ &= \frac{(\sqrt{t^2 + 1})^3}{t^2}\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}S'(t) &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{t^2 + 1} \cdot 2t \cdot t^2 - (\sqrt{t^2 + 1})^3 \cdot 2t}{t^4} \\ &= \frac{(t^2 - 2)\sqrt{t^2 + 1}}{t^3}\end{aligned}$$

となるので、 $t > 0$ における $S(t)$ の増減表は次のようになる。

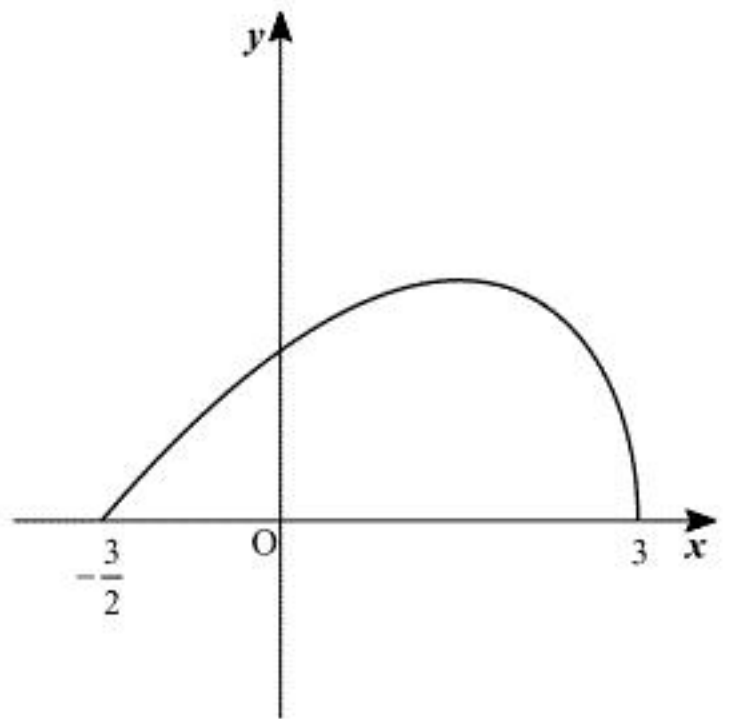
t	0	...	$\sqrt{2}$	...
$S'(t)$		-	0	+
$S(t)$		$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$

したがって、 $S(t)$ は、 $t = \sqrt{2}$ で最小値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

(3)

$x = 3 \cos 2t$ は $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ で単調減少し、 $y = 2 \sin 3t$ は $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ で単調増加、 $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ で単

調減少するので、グラフの概形は次のようになる。



したがって、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned}S &= \int_{-\frac{3}{2}}^3 y dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 2 \sin 3t \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 2 \sin 3t \cdot (-6 \sin 2t) dt \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t \sin 2t dt \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ -\frac{1}{2} (\cos(3t + 2t) - \cos(3t - 2t)) \right\} dt \\ &= -6 \left[\frac{1}{5} \sin 5t - \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{18\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

となる。