

〔解答〕

(1)	$\left(\frac{2}{3}\right)^n r \{\cos(\theta_0 + n\theta) + i \sin(\theta_0 + n\theta)\}$
(2)	$n = \frac{m\pi}{\theta}$ (ただし, $\frac{\pi}{\theta}$ は有理数で, m は n が正の整数となる整数)
(3)	$\frac{1}{15} r^2 \sin \theta (13 - 12 \cos \theta)$

〔解説〕

(1)

 $n \geq 0$ において,

$$z_{n+1} = \frac{2}{3} z_n (\cos \theta + i \sin \theta)$$

が成り立つ。よって, 数列 $\{z_n\}$ は公比 $\frac{2}{3}(\cos \theta + i \sin \theta)$, 初項 $z_0 = r(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$ の等比数列であるから,

$$\begin{aligned} z_n &= \left(\frac{2}{3}\right)^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n z_0 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n r (\cos \theta_0 + i \sin \theta_0) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n r \{\cos(\theta_0 + n\theta) + i \sin(\theta_0 + n\theta)\} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} z_1 - z_0 &= z_0 \left\{ \frac{2}{3} (\cos \theta + i \sin \theta) - 1 \right\} \\ z_{n+1} - z_n &= z_n \left\{ \frac{2}{3} (\cos \theta + i \sin \theta) - 1 \right\} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= t(z_1 - z_0) \\ \Leftrightarrow z_n &= t z_0 \end{aligned}$$

となる。また,

$$z_n, z_0, t \neq 0$$

であるから, 3点 O, z_0, z_n は同一直線上にある。また,

$$\begin{aligned} \arg(z_0) &= \theta_0 \\ \arg(z_n) &= \theta_0 + n\theta \end{aligned}$$

であるから, m を整数とすると, 求める条件は,

$$n\theta = m\pi$$

となる。したがって,

$$n = \frac{m\pi}{\theta}$$

である。

(3)

 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より, $0 < 2\theta \leq \pi$ である。したがって,

$$\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2} = \triangle OP_n P_{n+1} + \triangle OP_{n+1} P_{n+2} - \triangle OP_n P_{n+2}$$

と表すことができる。(1)より, $|z_n| = r\left(\frac{2}{3}\right)^n$ であるから, それぞれの面積は

$$\begin{aligned} \triangle OP_n P_{n+1} &= \frac{1}{2} r \left(\frac{2}{3}\right)^n r \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sin \theta = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1} \sin \theta \\ \triangle OP_{n+1} P_{n+2} &= \frac{1}{2} r \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} r \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} \sin \theta = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+3} \sin \theta \\ \triangle OP_n P_{n+2} &= \frac{1}{2} r \left(\frac{2}{3}\right)^n r \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1} \left(\sin \theta + \frac{4}{9} \sin \theta - \frac{2}{3} \sin 2\theta \right) \\ &= \frac{1}{18} r^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1} \sin \theta (13 - 12 \cos \theta) \\ &= \frac{1}{27} r^2 \left(\frac{4}{9}\right)^n \sin \theta (13 - 12 \cos \theta) \end{aligned}$$

となる。したがって, 求める無限級数は

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} S_n &= \frac{1}{27} r^2 \sin \theta (13 - 12 \cos \theta) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n \\ &= \frac{1}{27} r^2 \sin \theta (13 - 12 \cos \theta) \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \\ &= \frac{1}{15} r^2 \sin \theta (13 - 12 \cos \theta) \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(1)	解答なし
(2)	81
(3)	7 個, $n = 84, 90, 96$

〔解説〕

(1)

大学公式ホームページにおいて、本問題は正答が存在しないため、全員正答扱いとされることが発表されている。そもそも、 $\overline{A} \cup B = V$, $\overline{A} \cap \overline{B} = W$ を満たす A, B は存在しない。これは、 $\overline{A} \cap \overline{B} = W \Leftrightarrow A \cup B = \overline{W}$ であるところ、 $A \cup \overline{A} = U$ だから、 $(\overline{A} \cup B) \cup (A \cup B) = U$ となるので、 $V \cup \overline{W} = U$ を得る。しかし、左辺は「100 と互いに素でないか、奇数個の正の約数を持つ数の集合」を表すところ、3, 7 などにはこれに含まれないため、矛盾していることになる。

(2)

まず、 $x = {}_{99}C_{50} = \frac{99!}{50!49!}$ である。そして、分母と分子がそれぞれ3で割り切れる回数を考えると、1~99の自然数には、3の倍数が33個、9の倍数が11個、27の倍数が3個、81の倍数が1個含まれるので、分子は33+11+3+1=48回だけ3で割り切れる。一方、1~50の自然数には、3の倍数が16個、9の倍数が5個、27の倍数が1個含まれる。また、49!も50!と同じ回数3で割り切れるので、分母は計2(16+5+1)=44回だけ3で割り切れる。したがって、 x は48-44=4で計4回だけ3で割り切れるから、 x の約数のうち、 3^a の形で表せる数で最大のものは $3^4 = 81$ である。

(3)

まず、 $100 = 2^2 \cdot 5^2$ であるから、正の約数は $(2+1)(2+1) = 9$ 個ある。そして、 U の要素のうち、正の約数が10個以上あるのは、

$$3 \cdot 2^4 = 48 (2 \cdot 5 = 10)$$

$$5 \cdot 2^4 = 80 (2 \cdot 5 = 10)$$

$$3 \cdot 2^5 = 96 (2 \cdot 6 = 12)$$

$$3^2 \cdot 2^3 = 72 (3 \cdot 4 = 12)$$

$$3 \cdot 5 \cdot 2^2 = 60 (2 \cdot 2 \cdot 3 = 12)$$

$$3 \cdot 7 \cdot 2^2 = 84 (2 \cdot 2 \cdot 3 = 12)$$

$$2 \cdot 5 \cdot 3^2 = 90 (2 \cdot 2 \cdot 3 = 12)$$

の計7個ある(ただし、上記式のカッコ内はその数の正の約数の個数を表している)。そして、

100の正の約数の和は、 $(1+2+2^2) \cdot (1+5+5^2) = 217$ であり、上記の7個の自然数について正

の約数の和は、

$$48 \rightarrow (1+3)(1+2+2^2+2^3+2^4) = 124$$

$$80 \rightarrow (1+5) \cdot (1+2+2^2+2^3+2^4) = 186$$

$$96 \rightarrow (1+3) \cdot (1+2+2^2+2^3+2^4+2^5) = 252$$

$$72 \rightarrow (1+3+3^2) \cdot (1+2+2^2+2^3) = 195$$

$$60 \rightarrow (1+3) \cdot (1+5) \cdot (1+2+2^2) = 168$$

$$84 \rightarrow (1+3) \cdot (1+7) \cdot (1+2+2^2) = 224$$

$$90 \rightarrow (1+2) \cdot (1+5) \cdot (1+3+3^2) = 234$$

となるから求める n は 84, 90, 96 となる。

【解答】

(1)	96			
(2)	$a = -9, b = 6, c = -1$			
(3)	(3-1)	(3-2)	(3-3)	
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2401}{1296}$	

【解説】

(1)

$$3 \cdot 673 + 7 \cdot 0 = 2019$$

であるから、 $3x + 7y = 2019$ から辺々を引くと、

$$\begin{aligned} 3(x - 673) + 7y &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(x - 673) &= -7y \end{aligned}$$

となる。 $3, 7$ は互いに素であるから、 k を自然数として、

$$\begin{aligned} x &= 673 - 7k \\ y &= 3k \end{aligned}$$

とかける。 $x > 0$ かつ $y > 0$ である k の範囲を求めると、

$$\begin{aligned} \begin{cases} 673 - 7k > 0 \\ 3k > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow 0 < k < 96.1 \cdots \end{aligned}$$

となる。 k は自然数であるから、

$$k = 1, 2, \dots, 96$$

である。したがって、 $3x + 7y = 2019$ を満たす自然数 (x, y) の組は 96 組ある。

(2)

$f(x) = 0$ について解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -3 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0 \\ \alpha\beta\gamma = 1 \end{cases}$$

が成り立つ。そして、

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= (-3)^2 - 0 \\ &= 9 \\ \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 &= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 0^2 - 2(-3) \\ &= 6 \\ \alpha^2\beta^2\gamma^2 &= (\alpha\beta\gamma)^2 = 1 \end{aligned}$$

である。さらに、 $g(x) = 0$ について解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -a \\ \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = b \\ \alpha^2\beta^2\gamma^2 = -c \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、 $a = -9, b = 6, c = -1$ を得る。

(3)

(3-1)

サイコロのすべての目が出る確率は同様に確からしい。最初に出た目が 5 以上であればよいから、その確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。

(3-2)

2 回サイコロを投げて和が 4 以下となる目の出方は、

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$$

の 6 通りある。したがって、サイコロを 2 回以下投げて終わる確率は $1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$ である。よっ

て、2 回サイコロを投げて終わる確率は、1 回サイコロを投げて終わる確率を引いて

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \text{ となる。}$$

(3-3)

n 回サイコロを投げて出た目の和が 4 以下となる確率を p_n とおくと、 $p_0 = 1, p_n = 0 (n \geq 5)$ である。 n 回以下で試行が終わる確率は

$$1 - p_n$$

であり、 $n - 1$ 回以下で試行が終わる確率は

$$1 - p_{n-1}$$

であるから、 n 回で試行が終わる確率は、

$$(1 - p_n) - (1 - p_{n-1}) = p_{n-1} - p_n$$

である。したがって、求める期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^5 n(p_{n-1} - p_n) &= \sum_{n=0}^4 (n+1)p_n - \sum_{n=1}^5 np_n \\ &= \sum_{n=0}^4 (n+1)p_n - \sum_{n=0}^4 np_n \\ &= \sum_{n=0}^4 p_n \end{aligned}$$

となる。そして、3 回サイコロを投げて和が 4 以下となるのは出た目が

$$(1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)$$

の 4 通り、4 回サイコロを投げて和が 4 以下となるのは出た目が $(1, 1, 1, 1)$ の 1 通りであるから、 $(1), (2)$ の結果も合わせると、

$$p_1 = \frac{4}{6}, p_2 = \frac{6}{36}, p_3 = \frac{4}{216}, p_4 = \frac{1}{1296}$$

である。よって、求める期待値は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^4 p_n &= 1 + \frac{4}{6} + \frac{6}{36} + \frac{4}{216} + \frac{1}{1296} \\ &= \frac{2401}{1296} \end{aligned}$$

となる。

【解答】

(1)	$-\frac{2}{3}$
(2)	$\frac{160}{9}\log 3$
(3)	$\frac{8}{3}\pi$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2} \\ &= -\frac{1}{1+\sin x} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{2}{3}$$

と求まる。

(2)

 $0 \leq |\log_3 x| \leq 2$ より、 $\frac{1}{9} \leq x \leq 9$ であり、同様に $\frac{1}{9} \leq y \leq 9$ である。そして、

 $|\log_3 x| + |\log_3 y| = 2$ について、 $\log_3 x, \log_3 y$ の符号で場合分けをして概形を調べる。
[1] $\log_3 x, \log_3 y \geq 0 \Leftrightarrow x, y \geq 1$ のとき

$$|\log_3 x| + |\log_3 y| = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 xy = 2$$

$$\Leftrightarrow xy = 9$$

である。

[2] $\log_3 x \geq 0, \log_3 y < 0 \Leftrightarrow x \geq 1, y < 1$ のとき

$$|\log_3 x| + |\log_3 y| = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{x}{y} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = 9$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{9}x$$

である。

[3] $\log_3 x < 0, \log_3 y \geq 0 \Leftrightarrow x < 1, y \geq 1$ のとき

$$|\log_3 x| + |\log_3 y| = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{y}{x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = 9$$

$$\Leftrightarrow y = 9x$$

である。

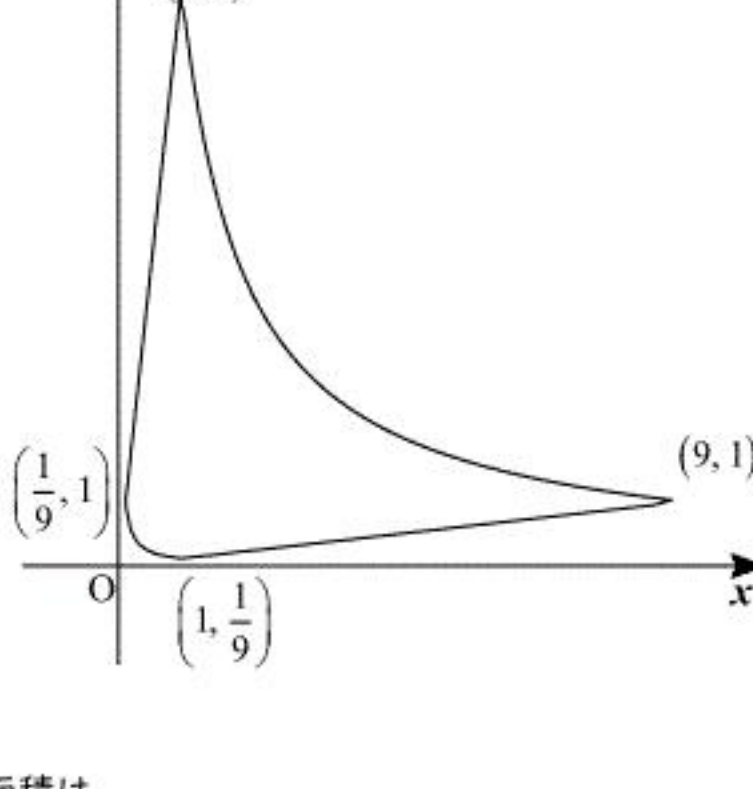
[4] $\log_3 x, \log_3 y < 0 \Leftrightarrow x, y < 1$ のとき

$$|\log_3 x| + |\log_3 y| = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{xy} = 2$$

$$\Leftrightarrow xy = \frac{1}{9}$$

である。

以上[1], [2], [3], [4]より、 $|\log_3 x| + |\log_3 y| = 2$ の概形は以下の通りであることが分かる。

したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{9}}^1 \left(9x - \frac{1}{9x}\right) dx + \int_1^9 \left(\frac{9}{x} - \frac{1}{9}x\right) dx \\ &= \left[\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{9}\log|x|\right]_{\frac{1}{9}}^1 + \left[9\log|x| - \frac{1}{18}x^2\right]_1^9 \\ &= 9\log 9 + \frac{1}{9}\log \frac{1}{9} \\ &= \frac{160}{9}\log 3 \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$p(\theta) = (1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$q(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin \theta$$

とおくと、 $p(\theta) = p(-\theta)$ 、 $q(\theta) = -q(-\theta)$ となるから、 $(x, y) = (p(\theta), q(\theta))$ で表される曲線は x 軸対称である。そのため、 $0 \leq \theta \leq \pi$ について考えればよい。次に、この曲線の概形を調べる。 $p(\theta), q(\theta)$ を微分すると、

$$p'(\theta) = -\sin \theta \cos \theta - (1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$= -\sin \theta (1 + 2 \cos \theta)$$

$$q'(\theta) = -\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \cos \theta$$

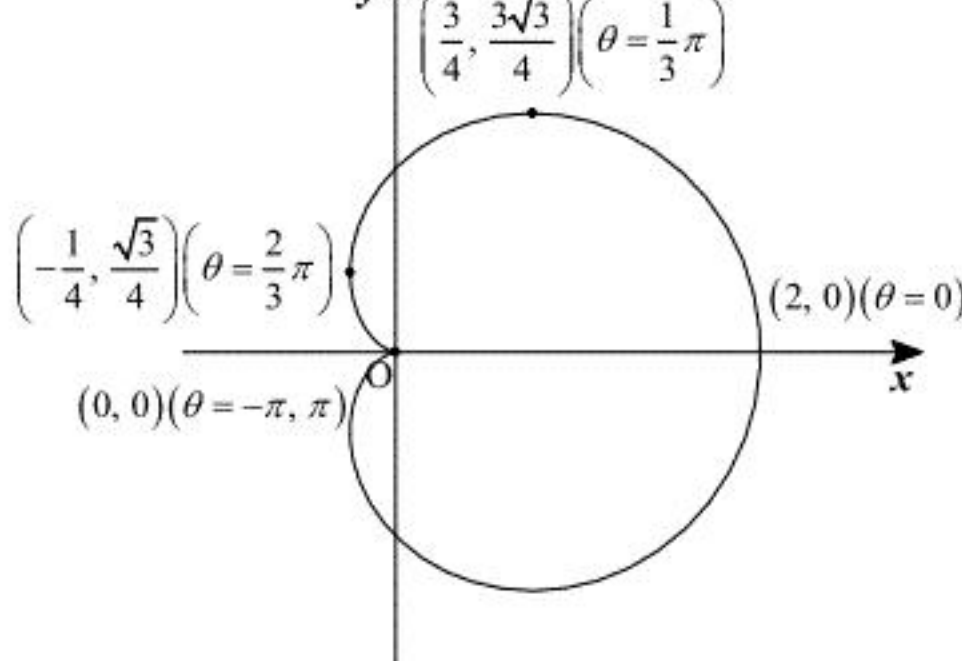
$$= 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1$$

$$= (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$$

となるから、増減表は以下の通りになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$p'(\theta)$		-	-	-	0	+	
$q'(\theta)$		+	0	-	-	-	
$p(\theta)$	2	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0
$q(\theta)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

したがって、曲線を図示すると以下の通りとなる。

また、上記曲線のうち $\theta = 0$ から $\theta = \frac{2}{3}\pi$ までの部分を $y = f(x)$ 、 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ から $\theta = \pi$ までの部分を $y = g(x)$ とすると、求める体積は、

$$\int_{-\frac{1}{4}}^2 \pi f(x)^2 dx - \int_{-\frac{1}{4}}^0 \pi g(x)^2 dx$$

と書ける。ここで、 $x = p(\theta)$ と変数変換をすると $\frac{dx}{d\theta} = p'(\theta)$ であり、対応は以下の通りにな

る。

x	$-\frac{1}{4}$	$\rightarrow$	2
θ	$\frac{2}{3}\pi$	$\rightarrow$	0

x	$-\frac{1}{4}$	$\rightarrow$	0
θ	$\frac{2}{3}\pi$	$\rightarrow$	π

したがって、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{4}}^2 \pi f(x)^2 dx - \int_{-\frac{1}{4}}^0 \pi g(x)^2 dx &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^0 \pi q(\theta)^2 p'(\theta) d\theta - \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \pi q(\theta)^2 p'(\theta) d\theta \\ &= -\pi \int_0^{\pi} q(\theta)^2 p'(\theta) d\theta \\ &= \pi \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta \cdot \sin \theta (1 + 2 \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

となる。そして、 $\cos \theta = t$ と変数変換をすると $-\sin \theta d\theta = dt$ であり、対応は以下の通りになる。

θ	0	$\rightarrow$	π
t	1	$\rightarrow$	-1

よって、

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta \cdot \sin \theta (1 + 2 \cos \theta) d\theta &= \pi \int_{-1}^1 (1+t)^2 (1-t^2) (1+2t) dt \\ &= \pi \int_{-1}^1 (-2t^5 - 5t^4 - 2t^3 + 4t^2 + 4t + 1) dt \\ &= \pi \int_{-1}^1 (-5t^4 + 4t^2 + 1) dt + \pi \int_{-1}^1 (-2t^5 - 2t^3 + 4t) dt \\ &= 2\pi \int_0^1 (-5t^4 + 4t^2 + 1) dt \\ &= 2\pi \left[-t^5 + \frac{4}{3}t^3 + t \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

となる。