

【解答】

(1)	角度： $\frac{\pi}{3}$ ，面積： $2\sqrt{3}$
(2)	$\beta' = \sqrt{3} - i, \gamma' = 2\sqrt{3} + 2i, \mu' = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
(3)	$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{14}, \cos \theta = \frac{3\sqrt{21}}{14}$
(4)	$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x \pm \sqrt{7}$

【解説】

(1)

$$|\overline{OB}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2, |\overline{OC}| = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} = 4$$

であり、 $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 4$ であるから、 $\overline{OB}, \overline{OC}$ のなす角を θ ($0 < \theta < \pi$)とおくと、

$$\cos \theta = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OC}}{|\overline{OB}| |\overline{OC}|} = \frac{1}{2}$$

より、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ である。よって、 $\triangle OBC$ の面積は、

$$\frac{1}{2} |\overline{OB}| |\overline{OC}| \sin \theta = 2\sqrt{3}$$

である。

(2)

$$\omega = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ とおくと、}$$

$$\begin{aligned} \beta' &= \beta \omega \\ &= \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma \omega \\ &= \left\{(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + (\sqrt{6}+\sqrt{2})i\right\} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= 2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

となる。また、原点周りの回転でB, C, Mの位置関係は不変だから、 μ' が表す位置は、 β', γ' が表す位置の中点である。よって、

$$\begin{aligned} \mu' &= \frac{\beta' + \gamma'}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

である。

(3)

$$M' \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ であるから、}$$

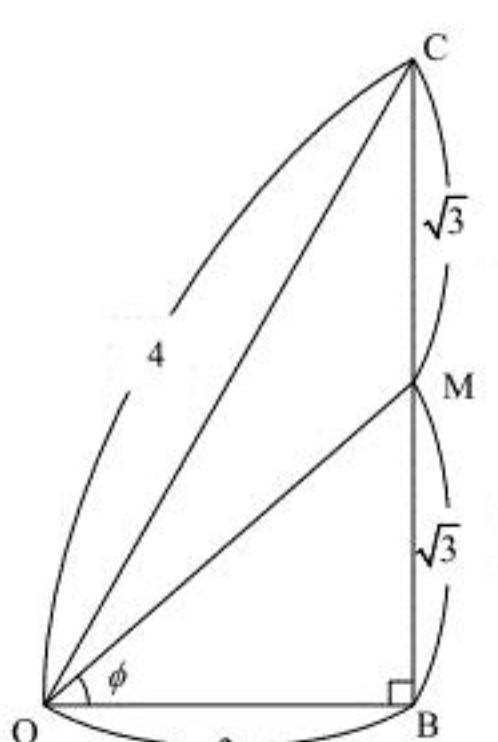
$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14} \\ \cos \theta &= \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{14} \end{aligned}$$

となる。

(4)

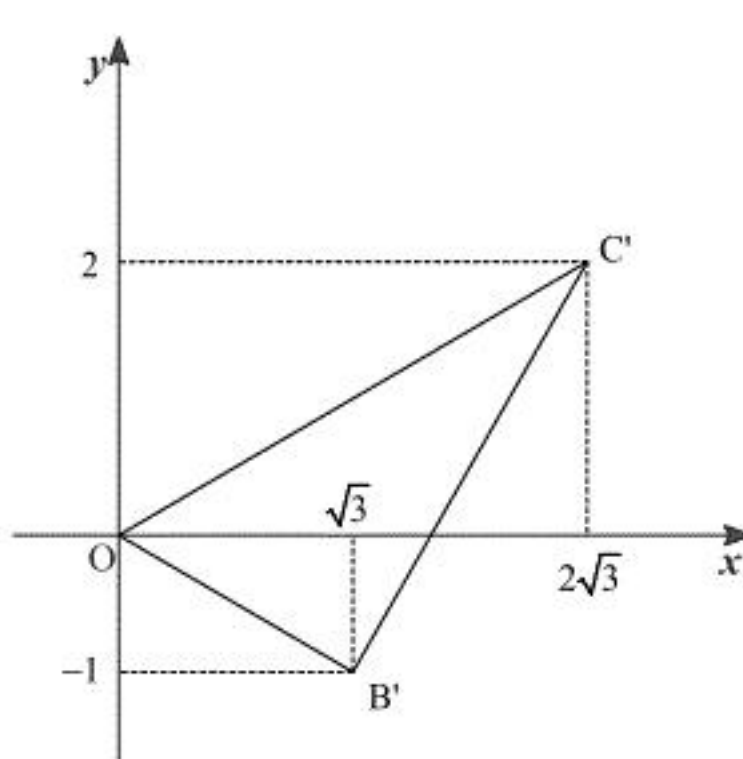
MがBCの中点であることから、 $\triangle OBC$ の面積がy軸で二等分されるとき、Mはy軸上に

ある。OB=2, OC=4, $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$ より、 $\angle OBC$ は直角であり、 $\triangle OBC$ は下図の形である。

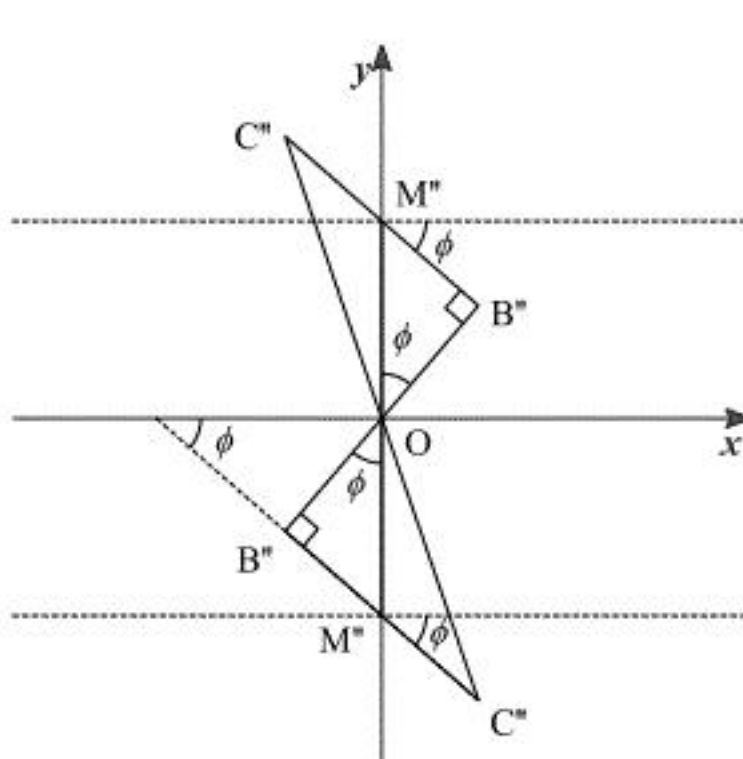


よって、 $OM = \sqrt{OB^2 + BM^2} = \sqrt{7}$ であり、 $\angle BOM = \phi$ とおくと、 $\tan \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。ここで、

(3)で定義したB', C'を図示すると次のようになる。



$\triangle OBC$ の向きが上図の通りであることに注意すると、 $\triangle OBC$ が回転して、Mがy軸上に存在するのは次図の2点である。



上図の2つの $\triangle OB''C''$ は点Oに対して点対称であるから、それぞれの直線B''C''の傾きは等

しくともに $\tan(-\phi) = -\tan \phi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。また、 $OM = \sqrt{7}$ よりB''C''上の点M''の座標は

$(0, \pm\sqrt{7})$ である。よって求める直線の方程式は、

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x \pm \sqrt{7}$$

である。

〔解答〕

(1)	問題不備により省略
(2)	$a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
(3)	$a_n = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \left\{ \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4} \right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4} \right)^n \right\}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

〔解説〕

(1)

問題不備により省略

(2)

 $(2n+1)a_n = (2n-3)a_{n-1}$ の両辺に $2n-1 (\neq 0)$ をかけると、

$$(2n+1)(2n-1)a_n = (2n-1)(2n-3)a_{n-1}$$

となる。ここで、 $b_n = (2n+1)(2n-1)a_n$ とおくと、

$$b_n = b_{n-1}$$

となり、 $b_1 = 3 \cdot 1 \cdot a_1 = 1$ より、数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = 1$ と得られる。よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{4n^2 - 1}$$

である。また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = 0$$

である。

(3)

 $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ を満たす (α, β) の組を考える。

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$$

より、係数を比較すれば、 $\alpha + \beta = \frac{1}{2}, \alpha\beta = -\frac{1}{8}$ を満たす。よって、 α, β は、二次方程式 $t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8} = 0$ の解である。よって、

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{1-\sqrt{3}}{4} \right), \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4} \right)$$

であるから、

$$\begin{cases} a_{n+2} - \frac{1+\sqrt{3}}{4}a_{n+1} = \frac{1-\sqrt{3}}{4}\left(a_{n+1} - \frac{1+\sqrt{3}}{4}a_n\right) \\ a_{n+2} - \frac{1-\sqrt{3}}{4}a_{n+1} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\left(a_{n+1} - \frac{1-\sqrt{3}}{4}a_n\right) \end{cases}$$

が得られる。よって、数列 $\left\{a_{n+1} - \frac{1+\sqrt{3}}{4}a_n\right\}$ は公比 $\frac{1-\sqrt{3}}{4}$ 、初項 $a_2 - \frac{1+\sqrt{3}}{4}a_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$ の等比数列であるから、

$$a_{n+1} - \frac{1+\sqrt{3}}{4}a_n = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^n \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。数列 $\left\{a_{n+1} - \frac{1-\sqrt{3}}{4}a_n\right\}$ についても同様に、

$$a_{n+1} - \frac{1-\sqrt{3}}{4}a_n = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^n \quad \dots \textcircled{2}$$

となるから、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{3}}{2}a_n &= \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^n \\ \therefore a_n &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \left\{ \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。 $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ より $\left|\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right| < 1, \left|\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right| < 1$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

である。

〔解答〕

(1)	(1-1)	$(0, \pm 5)$
	(1-2)	$y = \pm \frac{4}{3}x$
(2)	(2-1)	$\frac{25}{56}$
	(2-2)	$\frac{5}{28}$
	(2-3)	$\frac{47}{252}$

〔解説〕

(1)(1-1)

$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = -1$ は中心を原点とし、主軸を y 軸とする双曲線であるから、その焦点は、

$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ より、 $(0, \pm 5)$ である。

(1-2)

漸近線の方程式は、 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 0$ より、

$$y = \pm \frac{4}{3}x$$

である。

(2) (2-1)

A が赤球を引く場合と白球を引く場合に分けて考えると、B に含まれる赤球の個数に注意して、

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{4}{8} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{25}{56}$$

と求まる。

(2-2)

2 回の A の取り出し方は、赤→赤、赤→白、白→赤、白→白の 4 通り考えられるから、それぞれの場合で分けて考えると、(2-1) と同様に、

$$\begin{aligned} & \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{8} \\ &= \frac{5}{28} \end{aligned}$$

と求まる。

(2-3)

A からの 2 個の取り出し方は、赤球 2 個、赤白 1 個ずつ、白球 2 個の 3 通り考えられるから、それぞれの場合で考えると、

$$\begin{aligned} & \frac{{}_4C_2 \cdot {}_5C_2}{{}_7C_2 \cdot {}_9C_2} + \frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_7C_2} \cdot \frac{{}_4C_2}{{}_9C_2} + \frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_2}{{}_7C_2 \cdot {}_9C_2} \\ &= \frac{47}{252} \end{aligned}$$

と求まる。

【解答】

(1)	$y' = \frac{5}{(5x-7)\log 3}$
(2)	181654
(3)	13π

【解説】

(1)

$$y = \log_3(5x-7) = \frac{\log(5x-7)}{\log 3}$$

より,

$$y' = \frac{5}{(5x-7)\log 3}$$

である。

(2)

任意の自然数 n について, $\int_{n-1}^n f(x) dx = n$ より,

$$\begin{aligned} \int_{1928}^{2020} f(x) dx &= \sum_{k=1929}^{2020} \int_{k-1}^k f(x) dx \\ &= \sum_{k=1929}^{2020} k \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1929+2020) \cdot (2020-1929+1) \\ &= 181654 \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

$$\sqrt{\frac{x}{7}} + \sqrt[3]{\frac{y}{2}} = 1 \text{ は,}$$

$$y = 2 \left(1 - \sqrt{\frac{x}{7}} \right)^3$$

と表される。ここで, $f(x) = 2\sqrt{1-\frac{x}{7}}$, $g(x) = 2\left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^3$ とすると, $f(x)$ の定義域は

$$1 - \frac{x}{7} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 7 \text{ であり, } g(x) \text{ の定義域は } \frac{x}{7} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ である。ここで}$$

$$f(0) = g(0) = 2, f(7) = g(7) = 0 \text{ であり, } 0 < x < 7 \text{ において,}$$

$$1 > \sqrt{\frac{x}{7}} > \frac{x}{7} > 0$$

より,

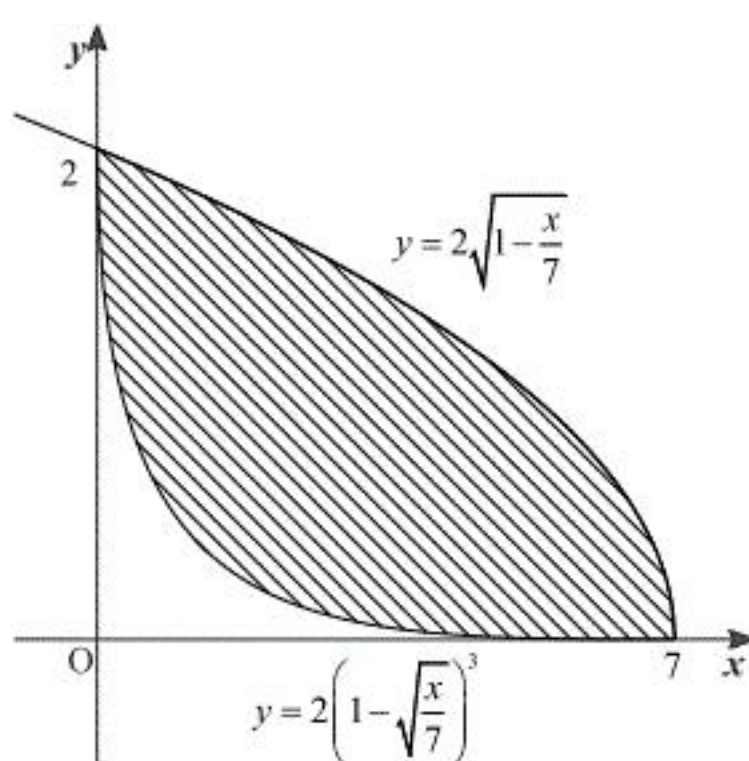
$$1 > 1 - \frac{x}{7} > 1 - \sqrt{\frac{x}{7}} > 0$$

であるから,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sqrt{1-\frac{x}{7}} \\ &> 2\left(1-\frac{x}{7}\right) \\ &> 2\left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right) \\ &> 2\left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^3 = g(x) \end{aligned}$$

を満たす。また $0 \leq x \leq 7$ において $f(x) \geq 0$ であり, $1 - \sqrt{\frac{x}{7}} > 0$ より $g(x) \geq 0$ も成り立つ。

以上から, 2 曲線のグラフは以下のようになる。

よって, 求める体積 V は,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^7 \pi \{ f(x)^2 - g(x)^2 \} dx \\ &= 4\pi \int_0^7 \left(1 - \frac{x}{7} \right) dx - 4\pi \int_0^7 \left(1 - \sqrt{\frac{x}{7}} \right)^6 dx \\ &= 4\pi \left[x - \frac{x^2}{14} \right]_0^7 - 4\pi \int_0^7 \left(1 - \sqrt{\frac{x}{7}} \right)^6 dx \\ &= 14\pi - 4\pi \int_0^7 \left(1 - \sqrt{\frac{x}{7}} \right)^6 dx \end{aligned}$$

となる。 $t = 1 - \sqrt{\frac{x}{7}}$ とおくと, $x = 7(1-t)^2$ となり,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -14(1-t) \\ \therefore dx &= -14(1-t) dt \end{aligned}$$

である。積分区間の対応は,

x	0	$\rightarrow$	7
t	1	$\rightarrow$	0

となるから,

$$\begin{aligned} \int_0^7 \left(1 - \sqrt{\frac{x}{7}} \right)^6 dx &= \int_1^0 t^6 \{ -14(1-t) \} dt \\ &= 14 \int_0^1 (t^6 - t^7) dt \\ &= 14 \left[\frac{t^7}{7} - \frac{t^8}{8} \right]_0^1 \\ &= 14 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} V &= 14\pi - 4\pi \cdot \frac{1}{4} \\ &= 13\pi \end{aligned}$$

と求まる。