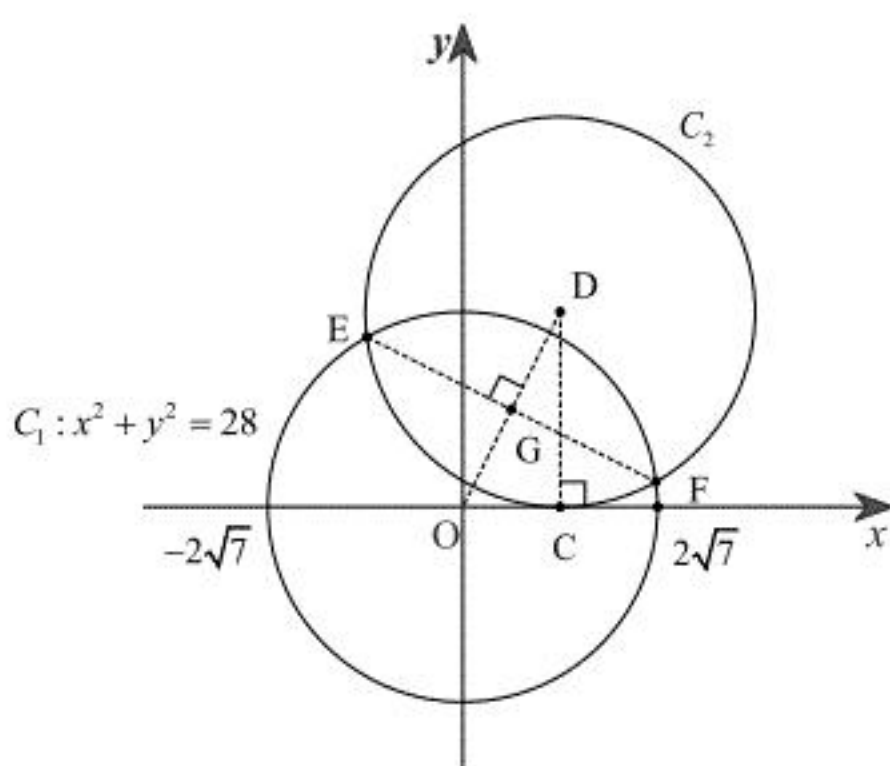


【解答】

(1)	$D(\sqrt{7}, 2\sqrt{7}), C_2: (x-\sqrt{7})^2 + (y-2\sqrt{7})^2 = 28$
(2)	$G\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \sqrt{7}\right), C_3: \left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + (y-\sqrt{7})^2 = \frac{77}{4}$
(3)	$\sqrt{70}$
(4)	$x^2 + y^2 \leq 28$ かつ $y \geq -\frac{x^2}{4\sqrt{7}} + \sqrt{7}$

【解説】



(1)

C_2 は $C(\sqrt{7}, 0)$ で x 軸と接するから D の x 座標は $\sqrt{7}$ である。また、 C_1 と C_2 の半径は等しい

から $CD = 2\sqrt{7}$ であり、 E, F の y 座標は負でないから $D(\sqrt{7}, 2\sqrt{7})$ である。よって

$$C_2: (x-\sqrt{7})^2 + (y-2\sqrt{7})^2 = 28$$

である。

(2)

$OE = OF = DE = DF = 2\sqrt{7}$ より、四角形 $OEDF$ はひし形であり、 G は OD と EF の交点であ

る。よって G は線分 OD の中点となり、 $G\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \sqrt{7}\right)$ である。また、 $\angle OGE = \frac{\pi}{2}$ であるから、

$\triangle OGE$ について三平方の定理より

$$\begin{aligned} EG &= \sqrt{OE^2 - OG^2} \quad (\because EG > 0) \\ &= \sqrt{28 - \frac{35}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{77}}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$C_3: \left(x - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + (y - \sqrt{7})^2 = \frac{77}{4}$$

である。

(3)

C_3 の式に $x = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} \left(0 - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + (y - \sqrt{7})^2 &= \frac{77}{4} \\ \Leftrightarrow (y - \sqrt{7})^2 &= \frac{35}{2} \\ \therefore y &= \sqrt{7} \pm \frac{\sqrt{70}}{2} \end{aligned}$$

である。よって求める距離は

$$\left(\sqrt{7} + \frac{\sqrt{70}}{2}\right) - \left(\sqrt{7} - \frac{\sqrt{70}}{2}\right) = \sqrt{70}$$

である。

(4)

t を $-2\sqrt{7} \leq t \leq 2\sqrt{7}$ を満たす実数とする。折り返された弧 PQ が点 $(t, 0)$ で接するとき、折り返された弧を含む円の式は、(1)と同様に考えて

$$(x-t)^2 + (y-2\sqrt{7})^2 = 28$$

となる。ゆえに直線 PQ の式は

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 28 - \{(x-t)^2 + (y-2\sqrt{7})^2 - 28\} &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{4\sqrt{7}}(-2tx + t^2 + 28) \end{aligned}$$

となる。ここで、 x を $-2\sqrt{7} \leq x \leq 2\sqrt{7}$ の範囲で固定して $f(t) = \frac{1}{4\sqrt{7}}(-2tx + t^2 + 28)$ とおき、

t を $-2\sqrt{7} \leq t \leq 2\sqrt{7}$ の範囲で変化させたときの $f(t)$ の取りうる値の範囲を調べる。このとき、 y 軸についての対称性により、 $0 \leq x \leq 2\sqrt{7}$ のみ調べればよい。すると

$$f(t) = \frac{1}{4\sqrt{7}}(t-x)^2 - \frac{x^2}{4\sqrt{7}} + \sqrt{7}$$

と変形できるから、 y の取りうる値の範囲は

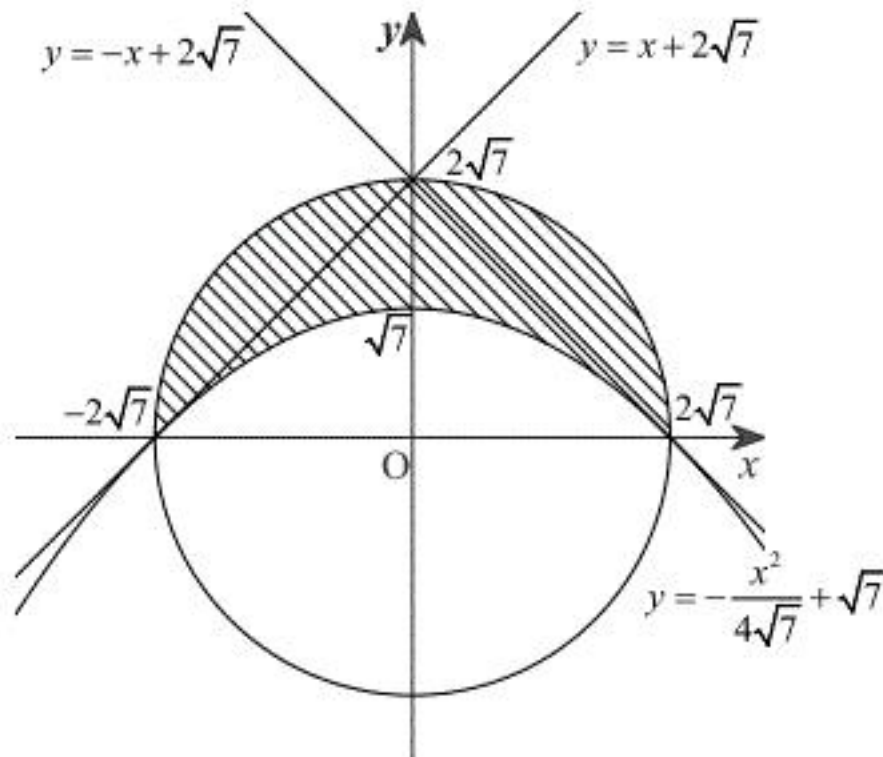
$$f(x) \leq y \leq f(-2\sqrt{7})$$

である。すなわち

$$-\frac{x^2}{4\sqrt{7}} + \sqrt{7} \leq y \leq x + 2\sqrt{7} \quad \cdots (*)$$

である。ここで x の固定を解除すると、 $0 \leq x \leq 2\sqrt{7}$ における弦 PQ の通過範囲は $(*)$ と

$x^2 + y^2 \leq 28$ の共通部分である。よって、 y 軸に関する対称性を考慮すると、求める範囲は以下の斜線部（ただし境界を含む）である。



したがって、弦 PQ の存在範囲は $x^2 + y^2 \leq 28$ かつ $y \geq -\frac{x^2}{4\sqrt{7}} + \sqrt{7}$ である。

【解答】

(1)	1, 5, 9
(2)	$n = 2, 3, 5, 6$
(3)	$(499, 501), (194, 196, 198, 202, 210)$

【解説】

(1)

□に入る数を x とすると、与えられた自然数は

$$202102 + 10x = 8(25262 + x) + 2x + 6$$

となるため、これが8の倍数である必要十分条件は $2x+6$ が8の倍数となることである。よって $x=0, 1, 2, \dots, 9$ のうち $2x+6$ が8の倍数となるのは $x=1, 5, 9$ である。

(2)

方程式が成立するのは以下の3つの場合である。

[1] $\sqrt{n^2 - 9n + 19} = 1$ のとき

$$\sqrt{n^2 - 9n + 19} = 1$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 9n + 19 = 1$$

$$\Leftrightarrow (n-3)(n-6) = 0$$

$$\therefore n = 3, 6$$

である。

[2] $n^2 + 5n - 14 = 0$ かつ $\sqrt{n^2 - 9n + 19} \neq 0$ のとき

 n は自然数より、

$$n^2 + 5n - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow (n+7)(n-2) = 0$$

$$\therefore n = 2$$

であり、このとき $\sqrt{n^2 - 9n + 19} = \sqrt{5} \neq 0$ であるからこれは適している。

[3] $n^2 - 9n + 19 = -1$ かつ $n^2 + 5n - 14$ が4の倍数のとき

$$n^2 - 9n + 19 = -1$$

$$\Leftrightarrow (n-4)(n-5) = 0$$

$$\therefore n = 4, 5$$

である。ここで $n=4$ のとき、 $n^2 + 5n - 14 = 22$ で4の倍数でないからこれは不適である。

一方で $n=5$ のとき、 $n^2 + 5n - 14 = 36$ で4の倍数であるからこれは適している。

以上[1], [2], [3]より、 $n=2, 3, 5, 6$ である。

(3)

(※)の和は

$$\begin{aligned} m + \sum_{k=1}^n (m + 2^k) &= m + (nm + 2^{n+1} - 2) \\ &= 2^{n+1} + (n+1)m - 2 \end{aligned}$$

であるから、(※)の和がちょうど1000になるとき、

$$2^{n+1} + (n+1)m - 2 = 1000$$

$$\Leftrightarrow (n+1)m = 1002 - 2^{n+1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。このとき①の左辺は正であるから右辺も正となり、 $n=1, 2, \dots, 8$ でなければならず、 $n=1, 2, \dots, 8$ のうち、①を満たす (n, m) の組は $(1, 499), (4, 194)$ である。したがって(※)は、

$$(499, 501), (194, 196, 198, 202, 210)$$

である。

【解答】

(1)	(1-1)	$\frac{17}{24}$
	(1-2)	$\frac{133}{450}$
(2)	(2-1)	$S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$
	(2-2)	$V = \frac{\pi^2}{2} - \frac{7}{6}\pi$

【解説】

(1)(1-1)

事象 A の余事象を $\bar{A}$ 、事象 A が起こる確率を $P(A)$ とする。ここで、事象 A を「取り出した球が少なくとも1個は赤球であった」とすると、事象 $\bar{A}$ は「取り出した球が全て白球であった」となる。よって、

$$P(\bar{A}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{24}$$

より、

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{17}{24}$$

である。

(1)(1-2)

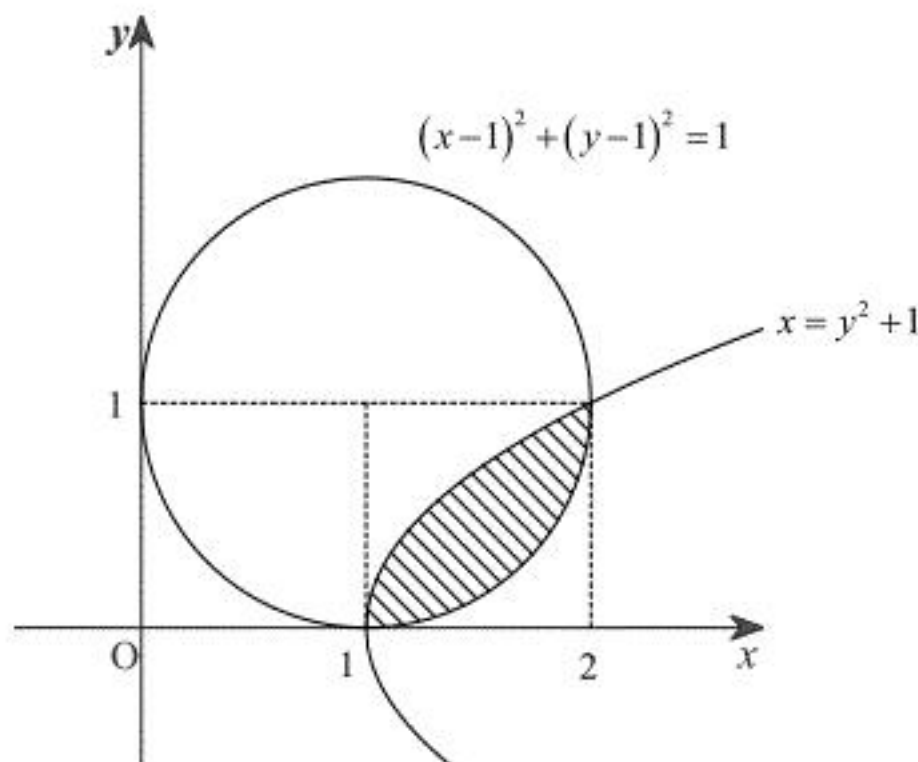
3回目に取り出したのが白球であり、袋に残った球が8個であるには、1回目と2回目で赤球と白球を1個ずつ取り出し、3回目で白球を取り出せばよい。よって、求める確率は、1回目と2回目に赤球、白球の順に取り出したか、白球、赤球の順に取り出したかで分けて考えると

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{9} = \frac{133}{450}$$

である。

(2)(2-1)

図形 A を xy 平面上に図示すると以下の斜線部(ただし境界を含む)である。



よって、求める面積 S は、1辺の長さが1の正方形と半径1の四分円を合わせた図形の面積から $x = y^2 + 1$ 、 y 軸、 x 軸、 $y = 1$ によって囲まれた図形の面積を引いた値であり、

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot 1 + \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{4} - \int_0^1 (y^2 + 1) dy \\ &= 1 + \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{3} y^3 + y \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

(2)(2-2)

$x = y^2 + 1$ の $y \geq 0$ の部分は $y = \sqrt{x-1}$ 、 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ の $y \leq 1$ の部分は

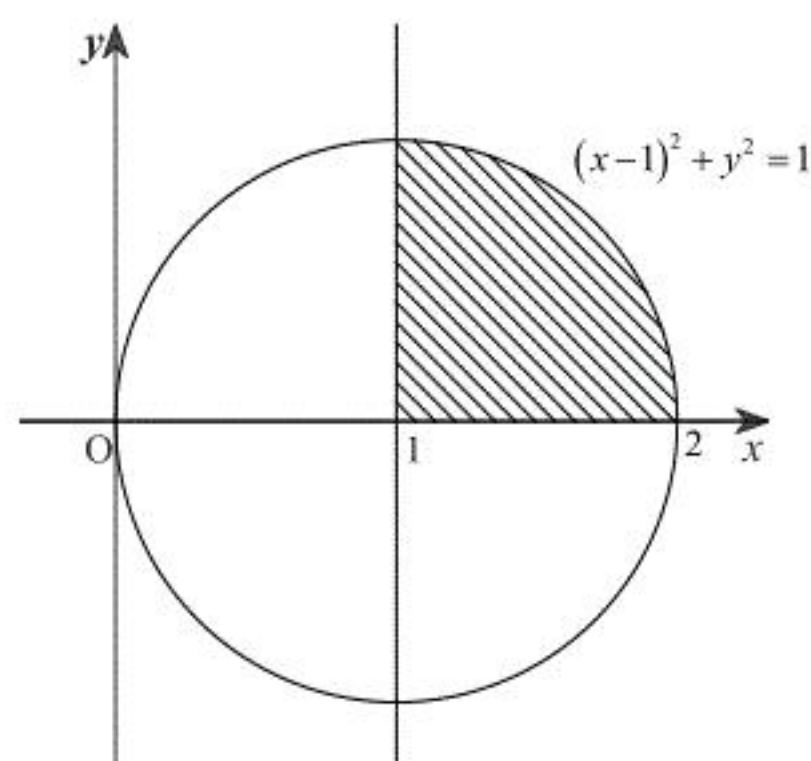
$y = 1 - \sqrt{1 - (x-1)^2}$ と表せる。よって、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 \left\{ \left(\sqrt{x-1} \right)^2 - \left(1 - \sqrt{1 - (x-1)^2} \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_1^2 \left\{ x - 3 + (x-1)^2 \right\} dx + 2\pi \int_1^2 \sqrt{1 - (x-1)^2} dx \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left\{ x - 3 + (x-1)^2 \right\} dx &= \left[\frac{1}{2} (x-3)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3 \right]_1^2 \\ &= -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

である。また、 $\int_1^2 \sqrt{1 - (x-1)^2} dx$ は以下の斜線部(ただし境界を含む)の面積を表す。



以上より、

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \left(-\frac{7}{6} \right) + 2\pi \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi^2}{2} - \frac{7}{6}\pi \end{aligned}$$

となる。

【解答】

(1)	(1-1)	$S = \pi ab$
	(1-2)	$V = \frac{2\pi}{\sqrt{pq}}$
(2)	(2-1)	A が勝つ確率 $\frac{1}{2}$, 引き分けの確率 $\frac{35}{128}$, B が勝つ確率 $\frac{29}{128}$
	(2-2)	2 倍

【解説】

(1)(1-1)

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は円 $x^2 + y^2 = 1$ を x 軸方向に a 倍, y 軸方向に b 倍した図形であるから, その面積は単位円の面積の ab 倍である。したがって $S = \pi ab$ となる。

(1)(1-2)

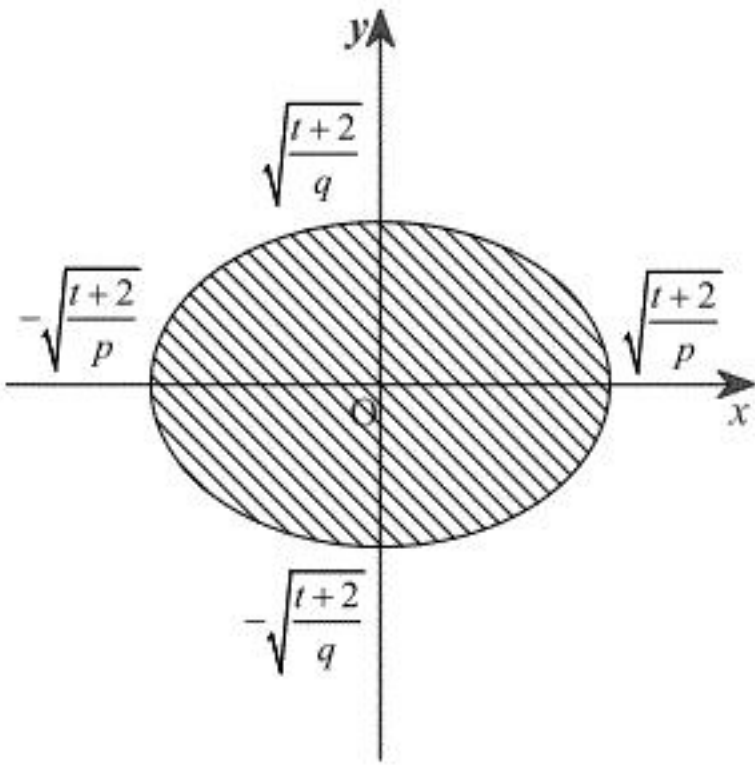
求める立体は

$$\begin{cases} px^2 + qy^2 \leq z + 2 \\ -2 \leq z \leq 0 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす領域である。ここで $-2 \leq t \leq 0$ として, 平面 $z = t$ による立体の切断面を考える。
 $-2 < t \leq 0$ のとき①は

$$\begin{aligned} px^2 + qy^2 &\leq t + 2 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{t+2}{p}} + \frac{y^2}{\frac{t+2}{q}} &\leq 1 \end{aligned}$$

となるため, 切断面は下図(ただし境界を含む)である。



よって, 断面積を $S(t)$ とおくと $-2 < t \leq 0$ のときは, (1)より

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi \sqrt{\frac{t+2}{p}} \sqrt{\frac{t+2}{q}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{pq}} (t+2) \end{aligned}$$

である。また, $t = -2$ のとき①は点 $(0, 0, -2)$ のみを表すから $S(-2) = 0$ であり, これは

$S(t) = \frac{\pi}{\sqrt{pq}} (t+2)$ を満たす。以上より

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^0 S(t) dt \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{pq}} \int_{-2}^0 (t+2) dt \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{pq}} \left[\frac{1}{2} (t+2)^2 \right]_{-2}^0 \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{pq}} \end{aligned}$$

となる。

(2)(2-1)

以下, A が x 枚, B が y 枚表を出したとき, (x, y) と表す。A と B が引き分けとなるのは $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)$ の 4 通りである。よって引き分けの確率は

$$({}_4C_0 \cdot {}_3C_0 + {}_4C_1 \cdot {}_3C_1 + {}_4C_2 \cdot {}_3C_2 + {}_4C_3 \cdot {}_3C_3) \left(\frac{1}{2} \right)^7 = \frac{35}{128}$$

である。一方で B が勝つのは $(0, 1), (0, 2), (1, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3)$ の 6 通りである。よって B の勝つ確率は

$$({}_4C_0 \cdot {}_3C_1 + {}_4C_0 \cdot {}_3C_2 + {}_4C_1 \cdot {}_3C_2 + {}_4C_0 \cdot {}_3C_3 + {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 + {}_4C_2 \cdot {}_3C_3) \left(\frac{1}{2} \right)^7 = \frac{29}{128}$$

である。また, A の勝つ確率, B の勝つ確率, 引き分けの確率の和は 1 になるため, A の勝つ確率は

$$1 - \left(\frac{35}{128} + \frac{29}{128} \right) = \frac{1}{2}$$

である。

(2)(2-2)

銀貨, 金貨の額面をそれぞれ a, na とおく。ただし a は正の実数, n は正の整数とする。また, A, B が勝ち取る金額の期待値をそれぞれ E_A, E_B とおくと

$$\begin{aligned} E_A &= \frac{1}{2} \cdot 3a = \frac{3}{2}a \\ E_B &= \frac{29}{128} \cdot 4na = \frac{29}{32}na \end{aligned}$$

となる。よって, $E_A < E_B$ となるとき

$$\begin{aligned} E_A &< E_B \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}a &< \frac{29}{32}na \\ \therefore n &> \frac{48}{29} \end{aligned}$$

であるから, n は少なくとも 2 とすればよい。