

(1)

$$\begin{aligned}
 (x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz &= \{x+(y+z)\}\{x(y+z)+yz\}-xyz \\
 &= x^2(y+z)+x(y+z)^2+yz(y+z) \\
 &= (y+z)\{x^2+x(y+z)+yz\} \\
 &= (x+y)(y+z)(z+x)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz = (x+y)(y+z)(z+x)$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \frac{7}{3+\sqrt{2}} &= \frac{7(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} \\
 &= 3-\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $1 < \sqrt{2} < 2$ であるから $1 < 3-\sqrt{2} < 2$ となる。したがって $a=1, b=2-\sqrt{2}$ であり、

$$\begin{aligned}
 a^2+b^2 &= 1^2 + (2-\sqrt{2})^2 \\
 &= 7-4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a=1, a^2+b^2=7-4\sqrt{2}$$

(3)

求める放物線は、放物線 $y=x^2-2x-11$ を x 軸方向に -3 、 y 軸方向に 5 だけ平行移動したものであるから、

$$\begin{aligned}
 y-5 &= (x+3)^2 - 2(x+3) - 11 \\
 \Leftrightarrow y &= x^2 + 4x - 3
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y=x^2+4x-3$$

(4)

$$\begin{aligned}
 (x+1)(x+2)(x-4)(x-5) &= \{(x+1)(x-4)\}\{(x+2)(x-5)\} \\
 &= (x^2-3x-4)(x^2-3x-10) \\
 &= \{(x^2-3x)-4\}\{(x^2-3x)-10\} \\
 &= (x^2-3x)^2 - 14(x^2-3x) + 40 \\
 &= x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 42x + 40
 \end{aligned}$$

である。

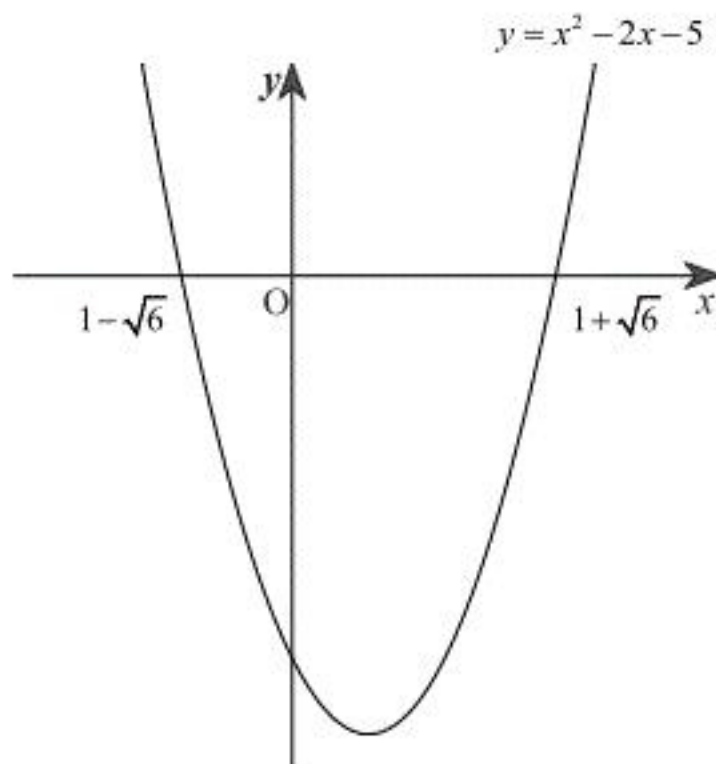
$$(\text{答}) \quad (x+1)(x+2)(x-4)(x-5) = x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 42x + 40$$

(5)

2次方程式 $x^2-2x-5=0$ を解くと、

$$\begin{aligned}
 x^2-2x-5 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= 1 \pm \sqrt{6}
 \end{aligned}$$

である。よって、 $y=x^2-2x-5$ のグラフを参考にすると、2次不等式 $x^2-2x-5 \leq 0$ の解は $1-\sqrt{6} \leq x \leq 1+\sqrt{6}$ である。



$$(\text{答}) \quad 1-\sqrt{6} \leq x \leq 1+\sqrt{6}$$

(1)

自然数が3の倍数であるための条件は、各位の和が3の倍数となることである。ここで、4桁の自然数 $35\square 2$ について、

$$3+5+2=10$$

より、 $35\square 2$ が3の倍数であるとき、 $\square$ に入る数字は2, 5, 8である。

(答) 2, 5, 8

(2)

等式 $xy+3x-2y=11$ は、

$$xy+3x-2y=11$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(y+3)=5$$

と変形できる。ここで x, y は整数であるから、 $x-2, y+3$ も整数である。よって、整数 (x, y) の組は

$$(x-2, y+3)=(1, 5), (5, 1), (-1, -5), (-5, -1)$$

$$\Leftrightarrow (x, y)=(3, 2), (7, -2), (1, -8), (-3, -4)$$

である。

(答) $(x, y)=(3, 2), (7, -2), (1, -8), (-3, -4)$

(3)

$$24=2^3 \cdot 3$$

$$504=2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

であるから、 n と24の最小公倍数が504であるような n は、整数 a を用いて

$$n=2^a \cdot 3^2 \cdot 7 \quad (a=0, 1, 2, 3)$$

と表せる。したがって、求める n は63, 126, 252, 504である。

(答) $n=63, 126, 252, 504$

(4)

すべての玉を区別すると、それぞれの玉の取り出し方は同様に確からしい。すると、袋から玉を同時に3個取り出すときの取り出し方は ${}_{15}C_3$ 通りである。また、白玉2個と赤玉1個が出るような取り出し方は ${}_7C_2 \cdot {}_5C_1$ 通りである。したがって、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_7C_2 \cdot {}_5C_1}{{}_{15}C_3} &= \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{15 \cdot 14 \cdot 13} \\ &= \frac{3}{13} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{3}{13}$

(1)

$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ とするとき,

$$\begin{aligned}\log_{10} 12^{100} &= 100 \cdot (2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\ &= 100 \cdot 1.0791 \\ &= 107.91\end{aligned}$$

より, $107 < \log_{10} 12^{100} < 108$ である。よって, 底が $10 (> 1)$ であるから,

$$107 < \log_{10} 12^{100} < 108 \Leftrightarrow 10^{107} < 12^{100} < 10^{108}$$

となる。したがって 12^{100} は 108 桁である。

(答) 108 桁

(2)

$$\begin{aligned}\log_{10} 10^{0.91} &= 0.91 \\ \log_{10} 9 &= 2 \log_{10} 3 = 0.9542\end{aligned}$$

より, $\log_{10} 10^{0.91} < \log_{10} 9$ である。よって,

$$\log_{10} 10^{0.91} < \log_{10} 9 \Leftrightarrow 10^{0.91} < 9$$

である。

(答) $10^{0.91} < 9$

(3)

$$\log_{10} 8 = 3 \log_{10} 2 = 0.9020$$

であるから, (2) より,

$$\log_{10} 8 < \log_{10} 10^{0.91} < \log_{10} 9 \Leftrightarrow 8 < 10^{0.91} < 9$$

である。また, (1) より $\log_{10} 12^{100} = 107.91 \Leftrightarrow 12^{100} = 10^{107.91}$ であるから,

$$\begin{aligned}8 &< 10^{0.91} < 9 \\ \Leftrightarrow 8 \cdot 10^{107} &< 10^{107.91} < 9 \cdot 10^{107} \\ \Leftrightarrow 8 \cdot 10^{107} &< 12^{100} < 9 \cdot 10^{107}\end{aligned}$$

となる。したがって, 12^{100} の最高位の数字は 8 である。

(答) 8

(1)

$A(3, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 2)$ であるから,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

より, $\overrightarrow{AB} = (-3, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 2)$ である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AB} = (-3, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 2)$$

(2)

$\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{OC}$ と表すとき, $\overrightarrow{OH} = (3s, t, 2u)$ であるから, $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ より

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3s, t, 2u) \cdot (-3, 1, 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -9s + t = 0$$

$$\therefore s = \frac{t}{9}$$

である。また, $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$ より

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3s, t, 2u) \cdot (-3, 0, 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -9s + 4u = 0$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{9}{4}s$$

$$\therefore u = \frac{t}{4} \left(\because s = \frac{t}{9} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{t}{9}, u = \frac{t}{4}$$

(3)

点 H は平面 α 上にあるから $s + t + u = 1$ である。よって, (2)より

$$s + t + u = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{9} + t + \frac{t}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{49}{36}t = 1$$

$$\therefore t = \frac{36}{49}$$

である。したがって $s = \frac{4}{49}, u = \frac{9}{49}$ であるから, 点 H の座標は $\left(\frac{12}{49}, \frac{36}{49}, \frac{18}{49}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{12}{49}, \frac{36}{49}, \frac{18}{49}\right)$$

(4)

(3)より, 垂線 OH の長さは

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OH}| &= \frac{1}{49} \sqrt{12^2 + 36^2 + 18^2} \\ &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad OH = \frac{6}{7}$$

(1)

$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ とし、曲線 C 上の接点の座標を $(s, f(s))$ (s は実数) とすると、点 $(s, f(s))$

における曲線 C の接線は

$$\begin{aligned} y &= f'(s)(x-s) + f(s) \\ \Leftrightarrow y &= (3s^2 - 2s - 2)(x-s) + s^3 - s^2 - 2s \\ \Leftrightarrow y &= (3s^2 - 2s - 2)x - 2s^3 + s^2 \end{aligned}$$

となる。これが点 $P(-1, 6)$ を通るとき、 s は実数より

$$\begin{aligned} 6 &= (3s^2 - 2s - 2) \cdot (-1) - 2s^3 + s^2 \\ \Leftrightarrow s^3 + s^2 - s + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (s+2)(s^2 - s + 1) &= 0 \\ \therefore s &= -2 \end{aligned}$$

であるから、求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \{3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 2\}x - 2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 \\ \Leftrightarrow y &= 14x + 20 \end{aligned}$$

である。

(答) $y = 14x + 20$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - (-2)^2 - 2 \cdot (-2) \\ &= -8 \end{aligned}$$

であるから、点 P から引いた接線と曲線 C との接点の座標は $(-2, -8)$ である。

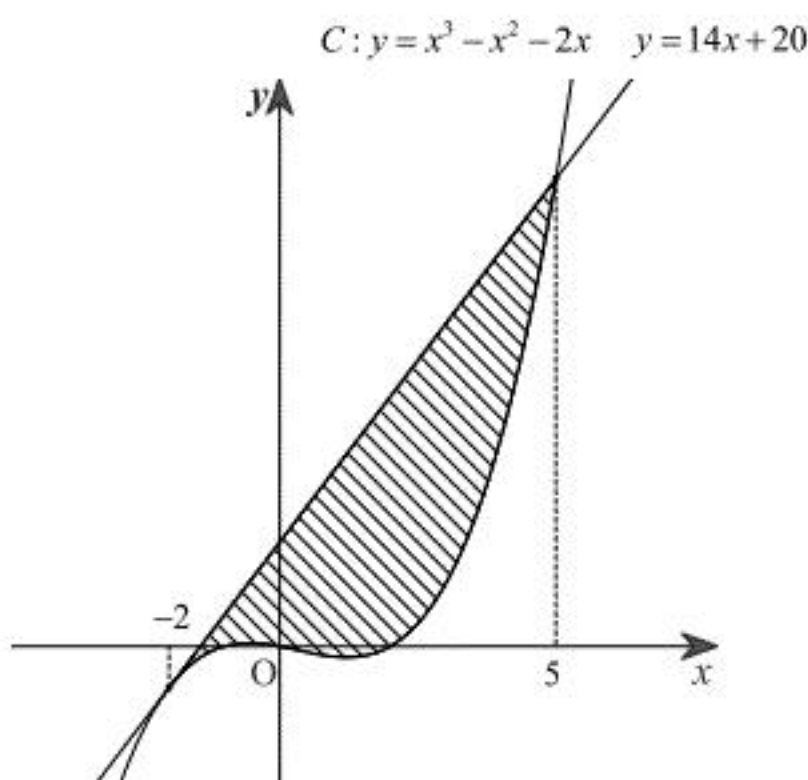
(答) $(-2, -8)$

(3)

曲線 C の方程式と(1)の接線の方程式を連立すると、

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 2x &= 14x + 20 \\ \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 16x - 20 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)^2(x-5) &= 0 \\ \therefore x &= -2, 5 \end{aligned}$$

であるから、曲線 C と(1)の接線の共有点の x 座標は $-2, 5$ となる。よって、(1)の接線と曲線 C とで囲まれる図形は次図の斜線部である。



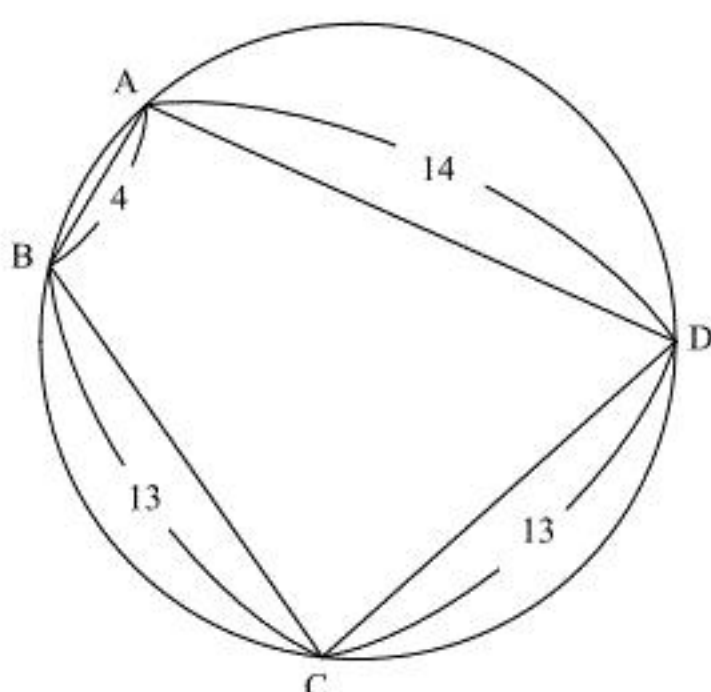
したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-2}^5 \{(14x + 20) - (x^3 - x^2 - 2x)\} dx &= -\int_{-2}^5 (x+2)^2(x-5) dx \\ &= \frac{1}{12} \cdot \{5 - (-2)\}^4 \\ &= \frac{2401}{12} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{2401}{12}$

(1)



$\triangle ABD$ について余弦定理より、

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + DA^2 - 2AB \cdot DA \cdot \cos \angle A \\ &= 212 - 112 \cos \angle A \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $\triangle BCD$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos \angle C \\ &= 338 - 338 \cdot \cos(180^\circ - \angle A) \\ &= 338 + 338 \cos \angle A \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} 212 - 112 \cos \angle A &= 338 + 338 \cos \angle A \\ \Leftrightarrow 450 \cos \angle A &= -126 \\ \therefore \cos \angle A &= -\frac{7}{25} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \cos \angle A = -\frac{7}{25}$$

(2)

(1)より、 $\cos \angle A = -\frac{7}{25}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} BD^2 &= 212 - 112 \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) \\ &= \frac{6084}{25} \end{aligned}$$

$$\therefore BD = \frac{78}{5} \quad (\because BD > 0)$$

である。

$$\text{(答)} \quad BD = \frac{78}{5}$$

(3)

(1)より、

$$\begin{aligned} \sin \angle A &= \sqrt{1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2} \\ &= \frac{24}{25} \quad (\because 0^\circ < \angle A < 180^\circ) \end{aligned}$$

であるから、四角形 ABCD の面積は

$$\begin{aligned} \triangle ABD + \triangle BCD &= \frac{1}{2} AB \cdot DA \cdot \sin \angle A + \frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin \angle C \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 14 \cdot \sin \angle A + \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 13 \cdot \sin(180^\circ - \angle A) \\ &= \left(28 + \frac{169}{2}\right) \sin \angle A \\ &= \frac{225}{2} \cdot \frac{24}{25} \\ &= 108 \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad 108$$

(1)

12人の生徒からまず3人を選び、その後残りの9人から4人を選ぶとすると、5人、4人、3人の3組に分ける方法は

$${}_{12}C_3 \cdot {}_9C_4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ = 27720 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 27720 通り

(2)

すべての組を区別すると、4人ずつ3組に分ける方法は、(1)と同様に考えて

$${}_{12}C_4 \cdot {}_8C_4 = 34650 \text{ (通り)}$$

である。ここで組の区別をなくすと、1つの組に対して重複している組は

$$3! = 6 \text{ (通り)}$$

存在するため、4人ずつ3組に分ける方法は

$$\frac{34650}{6} = 5775 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 5775 通り

(3)

(2)と同様に考えてすべての組を区別すると、6人、3人、3人の3組に分ける方法は

$${}_{12}C_3 \cdot {}_9C_3 = 18480 \text{ (通り)}$$

であり、組の区別をなくすと1つの組に対して重複している組は $2! = 2$ (通り) 存在するため、6人、3人、3人の3組に分ける方法は

$$\frac{18480}{2} = 9240 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 9240 通り

(1)

 $f(x) = x^2 - kx - 2k + 5$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - kx - 2k + 5 \\ &= \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4} - 2k + 5 \end{aligned}$$

となる。よって判別式を D とすると、2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる正の実数解を 2 つ持つための条件は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} D > 0 \\ \frac{k}{2} > 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 4(-2k + 5) > 0 \\ k > 0 \\ -2k + 5 > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k < -10, k > 2 \\ k > 0 \\ k < \frac{5}{2} \end{cases} \\ &\therefore 2 < k < \frac{5}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $2 < k < \frac{5}{2}$

(2)

(1)と同様に考えると、2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる負の実数解を 2 つ持つための条件は

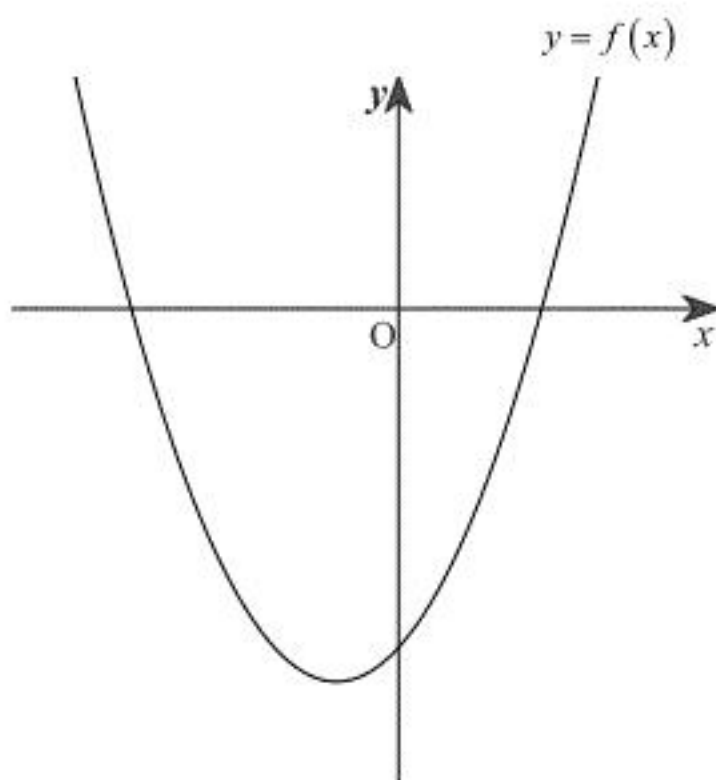
$$\begin{aligned} &\begin{cases} D > 0 \\ \frac{k}{2} < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k < -10, k > 2 \\ k < 0 \\ k < \frac{5}{2} \end{cases} \\ &\therefore k < -10 \end{aligned}$$

である。

(答) $k < -10$

(3)

2 次方程式 $f(x) = 0$ が正の実数解と負の実数解を 1 つずつ持つとき、 $y = f(x)$ のグラフは次図のようになる。



よって、前図より、2 次方程式 $f(x) = 0$ が正の実数解と負の実数解をもつ条件は

$$\begin{aligned} &f(0) < 0 \\ &\Leftrightarrow -2k + 5 < 0 \\ &\therefore k > \frac{5}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $k > \frac{5}{2}$