

1

(1)

与式について、最も次数の低い z について整理することで、

$$\begin{aligned} -4x^2y - 4zx^2 + y^3 + zy^2 &= (-4x^2 + y^2)z + (-4x^2 + y^2)y \\ &= (-4x^2 + y^2)(z + y) \\ &= -(2x + y)(2x - y)(y + z) \end{aligned}$$

と因数分解できる。

(答) $-(2x + y)(2x - y)(y + z)$

(2)

$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{2} < 3x - 1 \leq -\frac{1}{2}x + 15 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{2} < 3x - 1 \\ 3x - 1 \leq -\frac{1}{2}x + 15 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{32}{7} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq \frac{32}{7} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \end{aligned}$$

となるから、 $\textcircled{1}$ を満たす整数 x の個数を求めれば良い。ゆえに、 $x = 1, 2, 3, 4$ の4個である。

(答) 4個

(3)

放物線 $y = x^2 - 3x + 4$ を x 軸方向に a 、 y 軸方向に b だけ平行移動させた放物線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - b &= (x - a)^2 - 3(x - a) + 4 \\ \therefore y &= x^2 + (-2a - 3)x + (a^2 + 3a + b + 4) \end{aligned}$$

となる。この放物線の方程式が $y = x^2 + x + 3$ となる条件は、

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2a - 3 = 1 \\ a^2 + 3a + b + 4 = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

である。

(答) $a = -2, b = 1$

(4)

放物線 $y = -x^2 + 1$ と直線 $y = -2x + k$ の共有点の x 座標は、 $-x^2 + 1 = -2x + k$ 、つまり

$$x^2 - 2x + k - 1 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

の解として求まる。よって、放物線と直線が異なる2つの共有点を持つことは、 $\textcircled{1}$ が異なる2つの実数解を持つことと同値である。したがって、 $\textcircled{1}$ の判別式を D として、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow (-1)^2 - (k - 1) &> 0 \\ \therefore k &< 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $k < 2$

(5)

$\cos^2 \theta = 2 \sin \theta$ のとき、

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= 2 \sin \theta \\ \Leftrightarrow 1 - \sin^2 \theta &= 2 \sin \theta \\ \Leftrightarrow \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \theta &= -1 \pm \sqrt{2} \\ \therefore \sin \theta &= -1 + \sqrt{2} \quad (\because 0 \leq \sin \theta \leq 1) \end{aligned}$$

と計算できる。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} &= \frac{(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{2}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{2}{(-1 + \sqrt{2})^2} \\ &= \frac{2}{3 - 2\sqrt{2}} \\ &= 2(3 + 2\sqrt{2}) \\ &= 6 + 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\sin \theta = -1 + \sqrt{2}, \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} = 6 + 4\sqrt{2}$

(1)

$11x - 8y = 2$ を満たす1つの (x, y) の組として, $(x, y) = (-2, -3)$ がある。これより,

$$11x - 8y = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$11 \cdot (-2) - 8 \cdot (-3) = 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立し, $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より,

$$11(x+2) - 8(y+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 11(x+2) = 8(y+3)$$

が得られる。8と11は互いに素であるから, $x+2 = 8k$ (k は整数)と表せ, このとき $y+3 = 11k$ となる。つまり, $\textcircled{1}$ の整数解は $(x, y) = (8k-2, 11k-3)$ (k は整数)となり,

$$0 \leq 8k-2 \leq 30, 0 \leq 11k-3 \leq 30$$

をともに満たす整数 k は $k = 1, 2, 3$ である。それぞれの k の値に対応する $\textcircled{1}$ の解は, $(x, y) = (6, 8), (14, 19), (22, 30)$ である。

(答) $(x, y) = (6, 8), (14, 19), (22, 30)$

(2)

A, Bの2人の並べ方は, AB, BAの2通りである。A, Bが隣り合うように6人を並べることは, AB, BAの一方を選んだあと, この2人をまとめて1人と見なして5人を並べることと同じである。よって $2 \times 5! = 240$ (通り)と計算できる。

(答) 240 通り

(3)

a, b は $a < b$ かつ最大公約数が12である2数なので, $a' < b'$ をみたす互いに素な2つの自然数 a', b' を用いて

$$\begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \end{cases}$$

と表せる。最小公倍数が180であるから,

$$12a'b' = 180$$

$$\therefore a'b' = 15$$

となる。 $a' < b'$ より, $(a', b') = (1, 15), (3, 5)$ となり, $(a, b) = (12, 180), (36, 60)$ と求まる。

(答) $(a, b) = (12, 180), (36, 60)$

(4)

$12034_{(5)}$ を10進法で表すと,

$$5^0 \cdot 4 + 5^1 \cdot 3 + 5^2 \cdot 0 + 5^3 \cdot 2 + 5^4 \cdot 1 = 894$$

となる。

(答) 894

3

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2 \int_0^1 (t-2x) f(t) dt \\ &= x^2 + 2 \int_0^1 t f(t) dt - 4x \int_0^1 f(t) dt \\ &= x^2 + 2I_2 - 4xI_1 \end{aligned}$$

と表せる。ここで I_1, I_2 は x に依存しない定数である。よって、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (t^2 - 4tI_1 + 2I_2) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - 2t^2I_1 + 2I_2t \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - 2I_1 + 2I_2 \\ \Leftrightarrow 3I_1 - 2I_2 &= \frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 (t^3 - 4t^2I_1 + 2tI_2) dt \\ &= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{4}{3}t^3I_1 + t^2I_2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{4}{3}I_1 + I_2 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}I_1 &= \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。①と②を解くと、 $I_1 = \frac{3}{16}, I_2 = \frac{11}{96}$ と求まる。

(答) $I_1 = \frac{3}{16}, I_2 = \frac{11}{96}$

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^9 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \\ &= \frac{36}{55} \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $\frac{36}{55}$

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x - \sqrt{3} \cos x \\ &= 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。 $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \pi$ であるから、 $f(x)$ は $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ つまり $x = \frac{5}{6}\pi$ のとき最大値 2 をとる。

(答) $x = \frac{5}{6}\pi$ のとき最大値 2

(4)

点 P の座標を (x, y, z) とおくと、これは ℓ 上にあるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB} \quad (k \text{ は実数}) \\ \Leftrightarrow (x, y, z) &= (-3, -1, 1) + k(2, 1, -1) \\ \Leftrightarrow (x, y, z) &= (-3+2k, -1+k, 1-k) \end{aligned}$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(2k-5)^2 + (k-4)^2 + (-k-2)^2} \\ &= \sqrt{6(k-2)^2 + 21} \end{aligned}$$

となるから、 $k=2$ のときに d は最小値 $\sqrt{21}$ をとる。また、 $k=2$ のとき $P(1, 1, -1)$ である。

(答) d の最小値 $\sqrt{21}$, $P(1, 1, -1)$

C の方程式について $y' = 2x - 8$ であるから、 t を実数とすると、 C の点 $(t, t^2 - 8t + 12)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (2t - 8)(x - t) + (t^2 - 8t + 12) \\ &= (2t - 8)x - t^2 + 12 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と表せる。この直線が $P(2, -1)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} -1 &= (2t - 8) \cdot 2 - t^2 + 12 \\ \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 1)(t - 3) &= 0 \\ \therefore t &= 1, 3 \end{aligned}$$

となる。つまり P を通る 2 本の接線について、その 2 つの接点の座標は $(1, 5)$, $(3, -3)$ となり、 $x_1 < x_2$ より、 $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ と求まる。

(1)

$x = x_1, x_2$ における接線は、 $\textcircled{1}$ の t に x_1, x_2 を代入して、それぞれ

$$\begin{aligned} y &= (2x_1 - 8)x - x_1^2 + 12 \\ y &= (2x_2 - 8)x - x_2^2 + 12 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad l_1: y = (2x_1 - 8)x - x_1^2 + 12, \quad l_2: y = (2x_2 - 8)x - x_2^2 + 12$$

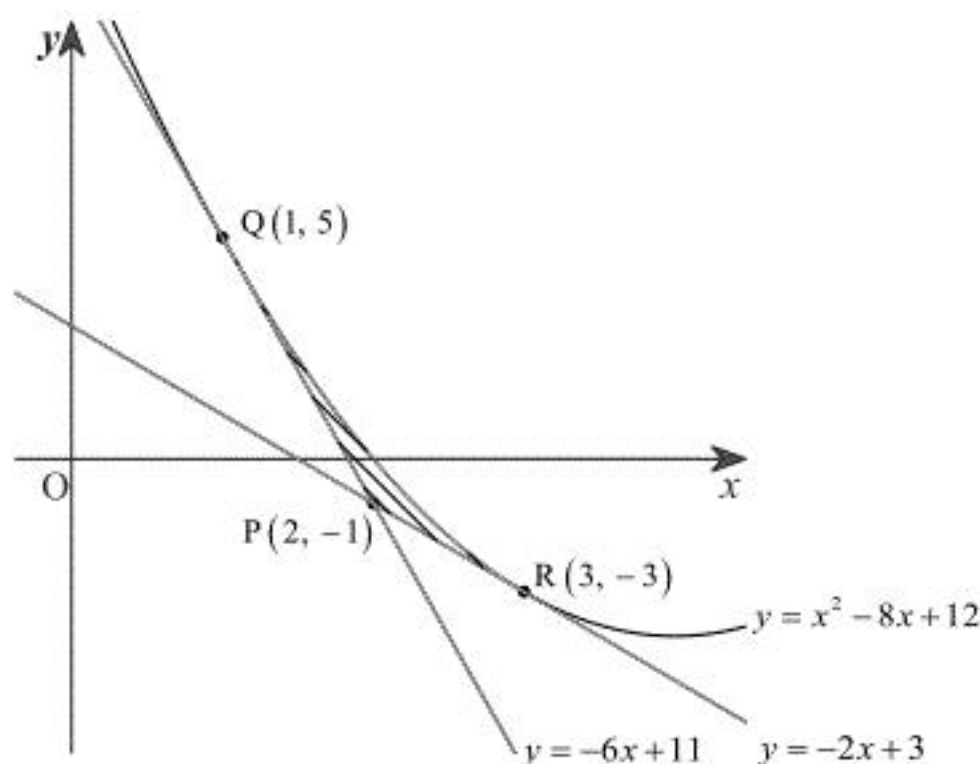
(2)

以上の考察より、 $Q(1, 5)$, $R(3, -3)$ とわかる。

$$(\text{答}) \quad Q(1, 5), R(3, -3)$$

(3)

下図の斜線部分の面積を求めればよい。



よって、求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{(x^2 - 8x + 12) - (-6x + 11)\} dx + \int_2^3 \{(x^2 - 8x + 12) - (-2x + 3)\} dx \\ &= \int_1^2 (x - 1)^2 dx + \int_2^3 (x - 3)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x - 1)^3}{3} \right]_1^2 + \left[\frac{(x - 3)^3}{3} \right]_2^3 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3}$$

(1)

数列 $\{a_n\}$ は初項が 3 の等比数列であるから、公比 r を用いて $a_n = 3 \cdot r^{n-1}$ と表せる。 $a_4 = 192$ より、

$$3r^3 = 192$$

$$\Leftrightarrow r^3 = 64$$

$$\therefore r = 4 \quad (\because r \text{ は実数})$$

と求まり、 $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ と表せる。このとき、

$$S_n = \frac{3(4^n - 1)}{4 - 1} = 4^n - 1$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad r = 4, a_n = 3 \cdot 4^{n-1}, S_n = 4^n - 1$$

(2)

$S_n = 4^n - 1$ であるから、 $4^n - 1 > 99999$ を満たす最小の n の値を求めればよい。

$$4^n - 1 > 99999$$

$$\Leftrightarrow 4^n > 100000$$

$$\Leftrightarrow n \log_{10} 4 > \log_{10} 10^5 \quad (\because 10 > 1)$$

$$\Leftrightarrow 2n \log_{10} 2 > 5$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{5}{0.602} \quad (\because \log_{10} 2 = 0.301)$$

$$\Leftrightarrow n > 8 + \frac{184}{602}$$

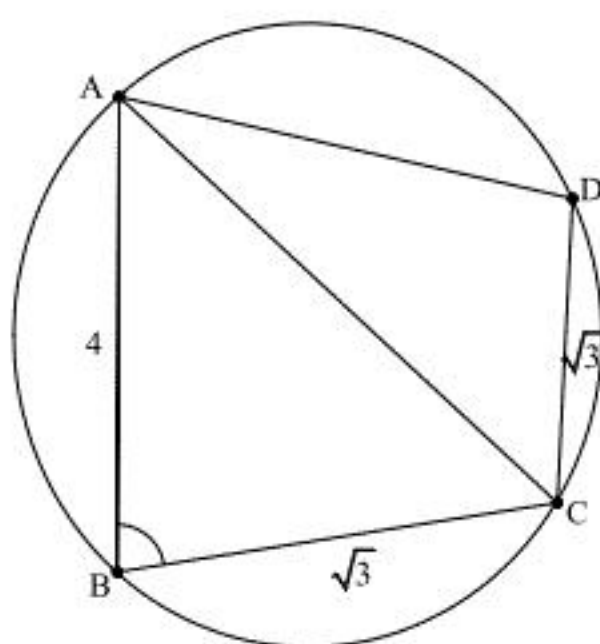
と計算できることより、 $4^n - 1 > 99999$ を満たす最小の n の値は 9 であるとわかる。以上の議論から、求める n の値は $n = 9$ である。

$$(\text{答}) \quad n = 9$$

6

(1)

四角形 ABCD は下図のようになる。



$\triangle ABC$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} AC^2 &= 4^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \\ &= 16 \end{aligned}$$

となり、 $AC = 4$ と求まる。

(答) $AC = 4$

(2)

四角形 ABCD は円に内接するから、 $\angle ABC + \angle ADC = \pi$ であり、

$$\begin{aligned} \cos \angle ADC &= \cos(\pi - \angle ABC) \\ &= -\cos \angle ABC \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

となる。これより、 $\triangle ADC$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} 4^2 &= (\sqrt{3})^2 + AD^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot AD \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\right) \\ \Leftrightarrow AD^2 + \frac{3}{4}AD - 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow (AD + 4)\left(AD - \frac{13}{4}\right) &= 0 \\ \therefore AD &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $AD = \frac{13}{4}$

(3)

$0 < \angle ABC < \pi$ より $\sin \angle ABC > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin \angle ABC &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} \\ &= \sqrt{1 - \frac{3}{64}} \\ &= \frac{\sqrt{61}}{8} \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{61}}{8}$

(4)

円 O の半径を R とする。円 O は $\triangle ABC$ に外接しているから、正弦定理より

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{AC}{\sin \angle ABC} \\ &= \frac{4}{\frac{\sqrt{61}}{8}} \\ &= \frac{32}{\sqrt{61}} \\ \therefore R &= \frac{16}{\sqrt{61}} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{16}{\sqrt{61}}$

全ての玉の取り出し方は、 ${}_{10}C_3 = 120$ (通り)である。

(1)

赤玉は4個あるので、3個とも赤玉となる玉の取り出し方は、 ${}_4C_3 = 4$ (通り)である。

よって、求める確率は、

$$\frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

と計算できる。

(答) $\frac{1}{30}$

(2)

白玉、青玉はそれぞれ3個ずつあるので、白玉2個、青玉1個となる玉の取り出し方は、

$${}_3C_2 \cdot {}_3C_1 = 9 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める確率は、

$$\frac{9}{120} = \frac{3}{40}$$

と計算できる。

(答) $\frac{3}{40}$

(3)

赤玉、白玉、青玉はそれぞれ4個、3個、3個あるから、全ての色が1個ずつとなる玉の取り出し方は、

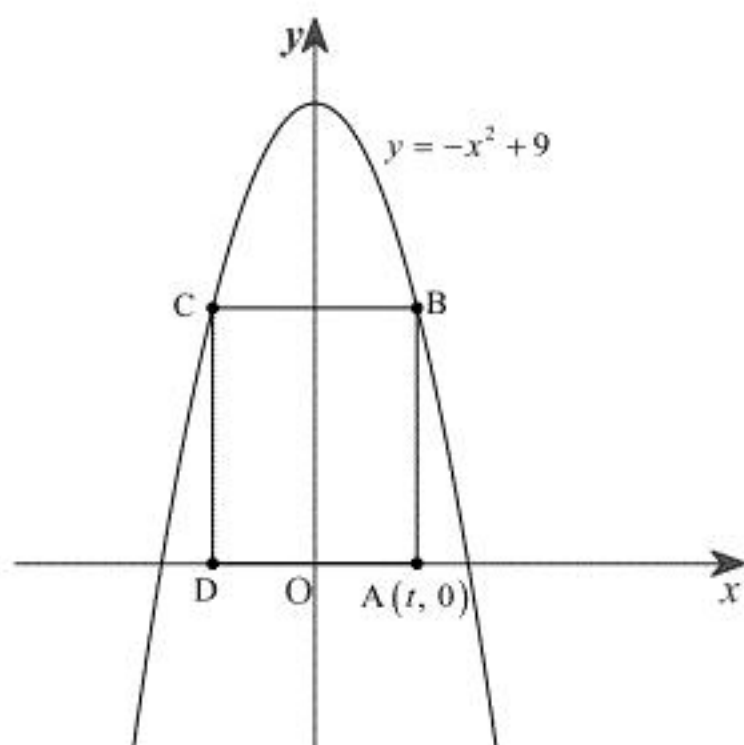
$${}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 = 36 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める確率は、

$$\frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

と計算できる。

(答) $\frac{3}{10}$



(1)

Bの x 座標は t で、Bは放物線上の点であるから、 $B(t, -t^2 + 9)$ とわかる。さらに長方形

ABCDは y 軸に関して対称であるから、 $C(-t, -t^2 + 9)$ 、 $D(-t, 0)$ とわかる。

(答) $B(t, -t^2 + 9)$ 、 $C(-t, -t^2 + 9)$ 、 $D(-t, 0)$

(2)

4辺の長さの和を L とすると、

$$\begin{aligned} L &= 2AB + 2AD \\ &= 2(-t^2 + 9) + 2 \cdot 2t \\ &= -2(t-1)^2 + 20 \end{aligned}$$

となる。よって、 L は $t=1$ のとき最大値20をとる。

(答) $t=1$ のとき最大値20

(3)

$\triangle ADC$ に対して三平方の定理を用いると、

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AD^2 + DC^2} \\ &= \sqrt{(2t)^2 + (-t^2 + 9)^2} \\ &= \sqrt{t^4 - 14t^2 + 81} \\ &= \sqrt{(t^2 - 7)^2 + 32} \end{aligned}$$

と求まる。 $0 < t < 3$ であるから、 AC は $t^2 = 7$ つまり $t = \sqrt{7}$ のとき最小値 $4\sqrt{2}$ をとる。

(答) $t = \sqrt{7}$ のとき最小値 $4\sqrt{2}$