

問題 1

異なる 2 つの実数解をもつためには

$x^2 + ax + 2 = 0$ の判別式が正となることが必要であるので $D = a^2 - 8 > 0 \cdots \textcircled{1}$

また 1 より大きい解を持つためには $f(x) = x^2 + ax + 2$ とした時

$f(1) > 0$ かつ $(f(x) \text{ の軸 }) > 1$ が必要なので $f(1) = 3 + a > 0 \cdots \textcircled{2}$, $-\frac{a}{2} > 1 \cdots \textcircled{3}$

①～③より求める a の範囲は $-3 < a < -2\sqrt{2}$

(答) $-3 < a < -2\sqrt{2}$

問題 2

(1) ①は中心 $(0,1)$ 、半径 a の円の周および内部を表す。

②について $x \geq 0$ のとき $y < b - x$ 、 $x < 0$ のとき $y < b + x$ となる。

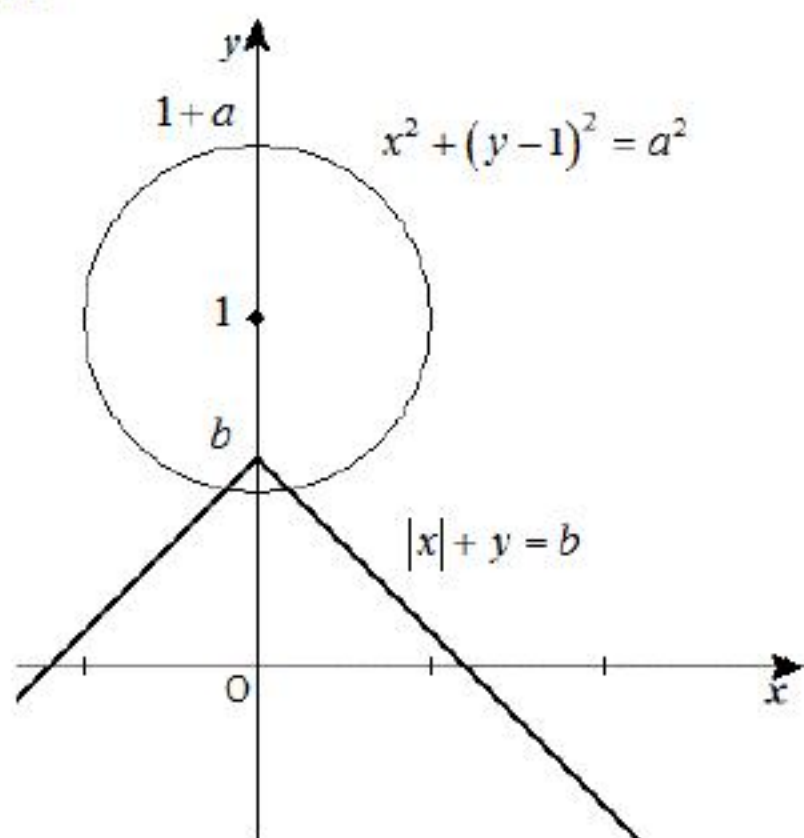
ここで①と②を同時に満たす実数が存在するには、 $y = b - x$ 、 $y = b + x$ が

交わる点である点 $(0, b)$ が、中心 $(0,1)$ 、半径 a の円の周上の点である $(0, 1-a)$ より上に存在すればよい。

よって求める条件とは

$$1 - a < b$$

すなわち $a + b > 1$



(答) $a + b > 1$

(2) 円の中心 $(0,1)$ が②の条件をみたし、かつ①の円の半径 a が②の直線と円の中心 $(0,1)$ との距離より小さければよい。

ここで②は y 軸対称より

($x \geq 0$ の範囲での②の直線と $(0,1)$ との距離)

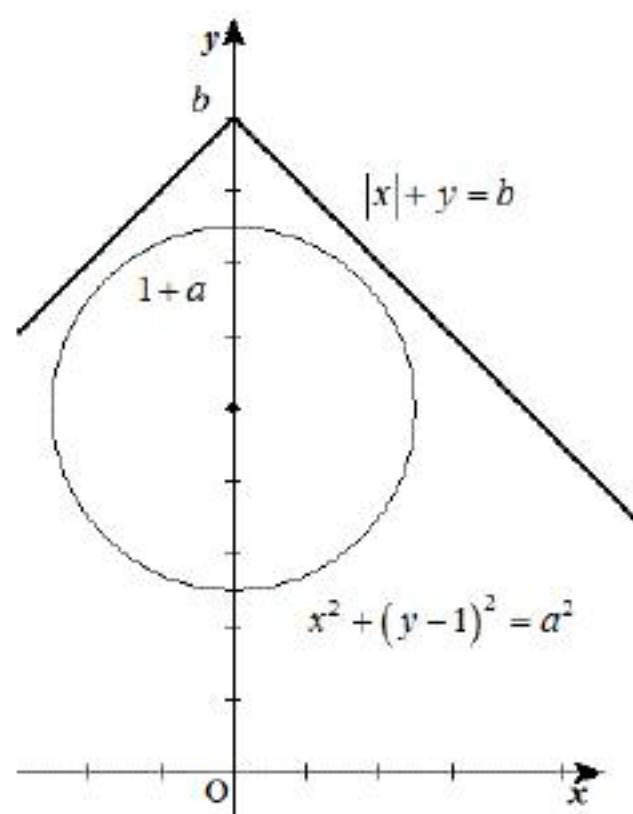
$=$ ($x < 0$ の範囲での②の直線と $(0,1)$ との距離)

となるので、 $x \geq 0$ のみ考えればよい。

$y = b - x$ と $(0,1)$ との距離は $\frac{|1-b|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|1-b|}{\sqrt{2}}$

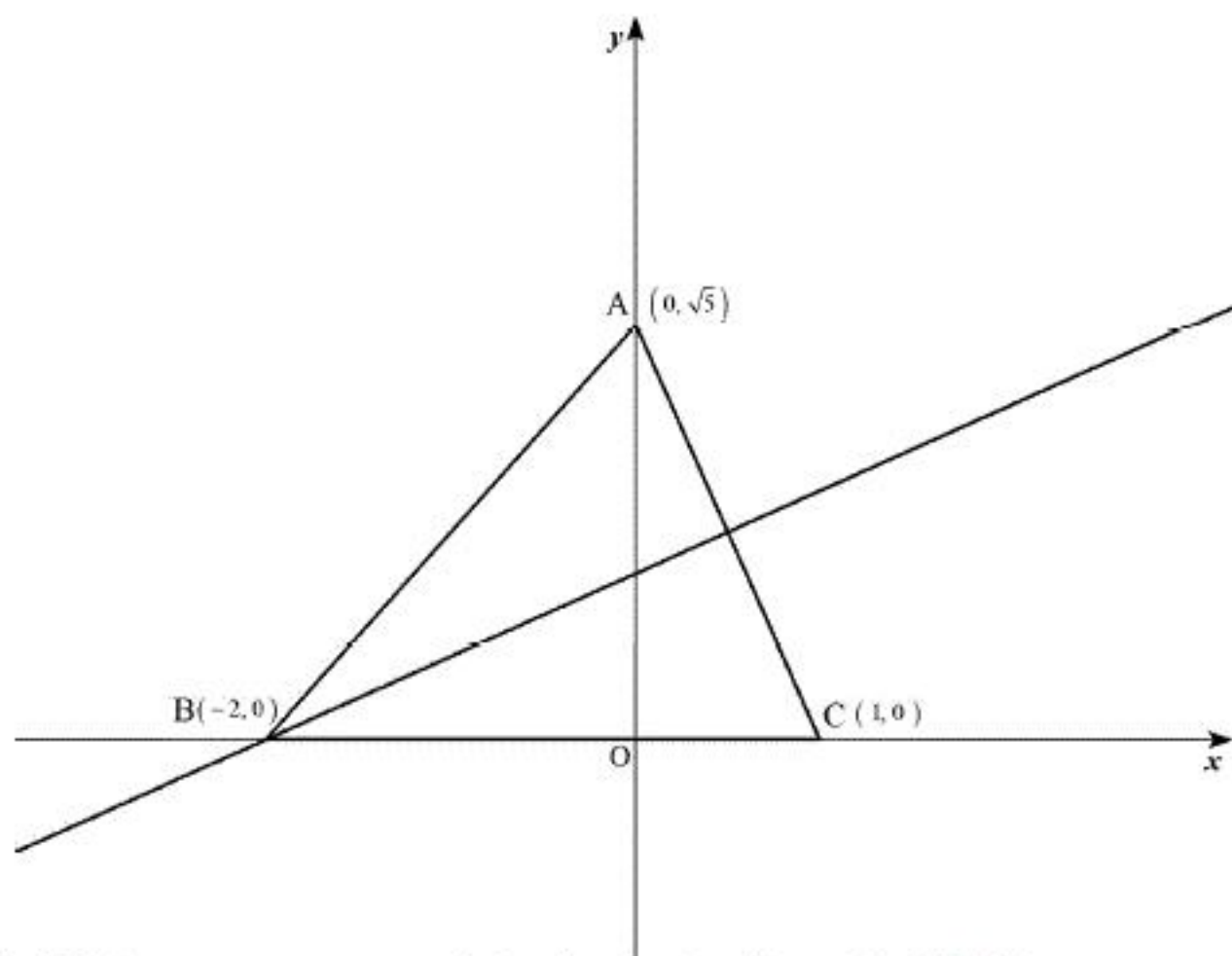
求める条件は $b > 1$ かつ $a < \frac{|1-b|}{\sqrt{2}}$

整理して $b > \sqrt{2}a + 1$



(答) $b > \sqrt{2}a + 1$

問題 3



三平方の定理より $AB = 3 = BC$ 。つまり $\triangle ABC$ は二等辺三角形となり
 $\angle ABC$ はその頂角となる。その性質より L は AC と垂直に交わる。 AC の傾きは $-\sqrt{5}$
 より L の傾きは $\frac{1}{\sqrt{5}}$

また L は B を通るので L の方程式は $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2)$

(答) $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2)$

問題 4

(1) $x_{k+1} - x_k = 2k$ より

$$n \geq 2 \text{ のとき } x_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = n^2 - n + 3。 \text{これは } n=1 \text{ でも満たすので}$$

$$n \geq 1 \text{ で } x_n = n^2 - n + 3$$

$$\text{また条件より } y_n = 3n - 2$$

$$(\text{答}) \quad x_n = n^2 - n + 3, \quad y_n = 3n - 2$$

(2) $y + 3 = m(x + 5)$ より求める直線は $y = mx + 5m - 3$

$$(\text{答}) \quad y = mx + 5m - 3$$

(3) $y_{2k-1} = 3(2k-1) - 2 = 6k - 5$

$$f(x_{2k-1}) = m\{(2k-1)^2 - (2k-1) + 3\} + 5m - 3 = m(4k^2 - 6k + 5) + 5m - 3$$

から

$$y_1 - f(x_1) = 1 - m(4 - 6 + 5) - 5m + 3 = -8m + 4$$

$$y_3 - f(x_3) = 7 - m(16 - 12 + 5) - 5m + 3 = -14m + 10$$

$$y_5 - f(x_5) = 13 - m(36 - 18 + 5) - 5m + 3 = -28m + 16$$

$$\text{よって } z = (-8m + 4)^2 + (-14m + 10)^2 + (-28m + 16)^2 = 1044m^2 - 1240m + 372$$

$$(\text{答}) \quad z = 1044m^2 - 1240m + 372$$

(4) $z = 1044 \left(m - \frac{155}{261} \right)^2 + \frac{992}{261}$ より z を最小とする m は $m = \frac{155}{261}$ 。このとき l の方程式

は

$$y = \frac{155}{261}x - \frac{8}{261}$$

$$(\text{答}) \quad y = \frac{155}{261}x - \frac{8}{261}$$