

問題 1

[解答] (1) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (2) -1.5562 (3) 11 (4) $-2 < x \leq 4$

(5) $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} < \sqrt[6]{14} < \sqrt{1+\sqrt{2}}$ (6) $\frac{n(n^2+2)}{3}$ (7) $\sqrt{7}$

(8) $1, \frac{29}{2}$

[解説] (1) $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = 9$
より

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ここで, $0 \leq \theta < \pi$ なので

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

(2) $36 = 2^2 \cdot 3^2$ より

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{1}{36} \right) &= -\log_{10}(2^2 \cdot 3^2) = -2\log_{10} 2 - 2\log_{10} 3 \\ &= -2(0.3010 + 0.4771) = -1.5562 \end{aligned}$$

(3) $x^{\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{4}} = 3$ より

$$\left(x^{\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{4}} \right)^2 = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} - 2 = 9$$

$$\therefore x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 11$$

(4) $\frac{x+2}{3} - \frac{x-2}{2} \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 4 \quad \cdots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x < 12 &\Leftrightarrow (x-6)(x+2) < 0 \\ &\Leftrightarrow -2 < x < 6 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②より, 求める解は
 $-2 < x \leq 4$

(5) $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}} \right)^6 = \left(1+\sqrt{2} \right)^3 = 7+5\sqrt{2}$

ここで, $1.4 < \sqrt{2}$ より

$$14 < 7+5\sqrt{2} = \left(\sqrt{1+\sqrt{2}} \right)^6$$

$$\therefore \sqrt{1+\sqrt{2}} > \sqrt[6]{14}$$

また,

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} \right)^6 = \left(2+\sqrt{3} \right)^2 = 7+4\sqrt{3}$$

$\sqrt{3} < 1.75$ より

$$14 > 7+4\sqrt{3} = \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} \right)^6$$

$$\therefore \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} < \sqrt[6]{14}$$

以上より

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} < \sqrt[6]{14} < \sqrt{1+\sqrt{2}}$$

(6) $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (k^2 - k + 1) = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$
 $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n^2+2)}{3}$

(7) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$

なので,

$$\left| 2\vec{a} - 3\vec{b} \right|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 4 \cdot 4 - 12 \cdot 3 + 9 \cdot 3 = 7$$

$$\therefore \left| 2\vec{a} - 3\vec{b} \right| = \sqrt{7}$$

(8) $y = 2x^3 + x + 1$, $y' = 6x^2 + 1$

より, 関数上の点 $(t, 2t^3 + t + 1)$ における接線の方程式は

$$y = (6t^2 + 1)x - 4t^3 + 1$$

これが $(1, 2)$ を通るとき

$$2 = 6t^2 + 1 - 4t^3 + 1 \Leftrightarrow 2t^2(2t - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0, \frac{3}{2}$$

$t = 0$ のとき, 接線の傾きは 1

$t = \frac{3}{2}$ のとき, 接線の傾きは $\frac{29}{2}$

問題 2

(1) $0 \leq x \leq a$ では $|x-a| = a-x$

$a \leq x \leq 1$ では $|x-a| = x-a$ より,

$$\begin{aligned} G(a) &= \int_0^a (x+a)(a-x) dx + \int_a^1 (x+a)(x-a) dx \\ &= -\int_0^a (x^2 - a^2) dx + \int_a^1 (x^2 - a^2) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 - a^2x \right]_0^a + \left[\frac{1}{3}x^3 - a^2x \right]_a^1 \\ &= \frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(答) $G(a) = \frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}$

(2) $G'(a) = 4a^2 - 2a = 2a(2a-1)$

よって, $G(a)$ の $0 \leq a \leq 1$ における増減表は次のようになる。

a	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$G'(a)$	0	-	0	+	
$G(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

増減表より, $G(a)$ を最小にする a の値は $\frac{1}{2}$

(答) $a = \frac{1}{2}$

問題 3

A は $x^2 + y^2 = 1$ 上の点より, $A(\cos \theta, \sin \theta)$ とおける。 ($0 \leq \theta < 2\pi$)

$\overline{CA} = (\cos \theta - 2, \sin \theta)$, $\overline{CB} = (-1, \sqrt{3})$ より, $\triangle ABC$ の面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| -\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta + 2\sqrt{3} \right| \\ &= \left| \sqrt{3} - \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) \right| \\ &= \left| \sqrt{3} - \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi \text{ なるので, } -1 \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$$

よって, $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ のとき S は最小になる。

このとき, A の座標は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$

$$\text{(答)} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$