

問題 1

3 次方程式の解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{8}{3} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2 \end{cases}$$

を得る。よって,

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= \left(-\frac{8}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \\ &= \frac{28}{9} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{28}{9}$

問題 2

$2x+y+1=0$, $2x-ky+2=0$ が x 軸の正方向となす角を、それぞれ θ_1, θ_2 とおくと、
2 直線のなす角 θ が 45° になる条件は、

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \pm 1$$

が成り立つことである。

[1] $k=0$ のとき

$$2x-ky+2=0 \Leftrightarrow x=-1$$

となるので、 $\theta_2 = 90^\circ$ である。よって、

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \pm 1 \Leftrightarrow \tan \theta_1 = \mp 1 \quad (\text{複号同順})$$

となるが、 $\tan \theta_1 = -2$ なので、これは成り立たない。

[2] $k \neq 0$ のとき

$$\tan \theta_1 = -2, \tan \theta_2 = \frac{2}{k}$$

なので、

$$\begin{aligned}\tan(\theta_1 - \theta_2) &= \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \\ &= \frac{-2 - \frac{2}{k}}{1 - \frac{4}{k}} \\ &= \frac{-2k - 2}{k - 4}\end{aligned}$$

[a] $\tan(\theta_1 - \theta_2) = 1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{-2k - 2}{k - 4} &= 1 \\ \Leftrightarrow -2k - 2 &= k - 4 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

[b] $\tan(\theta_1 - \theta_2) = -1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{-2k - 2}{k - 4} &= -1 \\ \Leftrightarrow -2k - 2 &= -k + 4 \\ \Leftrightarrow k &= -6\end{aligned}$$

以上より、求める k の値は $k = \frac{2}{3}, -6$ である。

(答) $k = \frac{2}{3}, -6$

問題 3

(1)

数列 $2, -2, 2, -2, 2, \dots$ の一般項は $2 \cdot (-1)^{n+1}$ である。一方, 数列 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$ の一般項は n^2 である。求める数列の一般項は, これら 2 つの数列の各項の積で表されることから,

$$a_n = 2 \cdot (-1)^{n+1} \cdot n^2$$

となる。

$$(\text{答}) \ a_n = 2 \cdot (-1)^{n+1} \cdot n^2$$

(2)

$n = 2k$ のとき, 数列を次のように 2 項ずつまとめて S_n を考える。

$$(2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 2^2) + (2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 4^2) + \dots + \{2 \cdot (2k-1)^2 - 2 \cdot (2k)^2\}$$

これより,

$$\begin{aligned} S_{2k} &= \sum_{m=1}^k \{2 \cdot (2m-1)^2 - 2 \cdot (2m)^2\} \\ &= 2 \sum_{m=1}^k (1 - 4m) \\ &= 2 \{k - 2k(k+1)\} \\ &= -4k^2 - 2k \\ &= -n^2 - n \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \ S_n = -n^2 - n$$

(3)

(2) の答を用いると,

$$\begin{aligned} S_{2k-1} &= S_{2k} - a_{2k} \\ &= -4k^2 - 2k + 2 \cdot (2k)^2 \\ &= 4k^2 - 2k \\ &= (n+1)^2 - (n+1) \\ &= n^2 + n \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \ S_n = n^2 + n$$

問題 4

(1)

真数条件より、 $x > 0$ である。

対数の底が 1 よりも小さいことに注意すると、

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}} x &> 0 \\ \therefore x &< \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1\end{aligned}$$

となるから、不等式の解は

$$0 < x < 1$$

である。

(答) $0 < x < 1$

(2)

真数条件と底の条件より、 $x > 0, x \neq 1$ である。

このもとで、

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}} x &> \log_x \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x &> \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。

[1] $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 > 1$$

なので、

$$\log_{\frac{1}{2}} x > 1$$

となる。これより、

$$0 < x < \frac{1}{2}$$

を得る。

[2] $\log_{\frac{1}{2}} x < 0$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 < 1$$

なので、

$$-1 < \log_{\frac{1}{2}} x < 0$$

となる。これより、

$$1 < x < 2$$

を得る。

以上より、不等式の解は、

$$0 < x < \frac{1}{2}, 1 < x < 2$$

である。

(答) $0 < x < \frac{1}{2}, 1 < x < 2$

問題 5

$$\begin{aligned}\int_0^1 2t^2 dt &= \left[\frac{2}{3} t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

なので、与式は、

$$\int_a^x (t-1)f(t)dt = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{2}{3}x^3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。①に $x=a$ を代入すると、

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{2}{3}a^3 \\ \Leftrightarrow 4a^3 - 3a^2 - 6a &= 0 \\ \Leftrightarrow a(4a^2 - 3a - 6) &= 0 \\ \Leftrightarrow a\left(a - \frac{3+\sqrt{105}}{8}\right)\left(a - \frac{3-\sqrt{105}}{8}\right) &= 0\end{aligned}$$

となり、 a は正なので、

$$a = \frac{3+\sqrt{105}}{8}$$

を得る。また、①の両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned}(x-1)f(x) &= -x-1+2x^2 \\ &= (x-1)(2x+1)\end{aligned}$$

となり、これが任意の x に対して成り立つので

$$f(x) = 2x+1$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{3+\sqrt{105}}{8}, \quad f(x) = 2x+1$$