

問題 1

$$(1) \ x = \frac{2}{3} \quad (2) \ 27 - 12\sqrt{5} \quad (3) \ \frac{15}{2} \quad (4) \ y' = 6x^2 + 6x - 4 \quad (5) \ \frac{5}{2} \log_{\frac{1}{2}} 4 < 3 \log_{\frac{1}{2}} 3 < 2 \log_{\frac{1}{2}} 5$$

$$(6) \ 10 \quad (7) \ a_n = 4n - 5 \quad (8) \ 0 \leq \theta < \frac{1}{6}\pi, \ \frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{7}{6}\pi, \ \frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} 7^x &= 49^{1-x} \\ \Leftrightarrow 7^x &= 7^{2-2x} \\ \Leftrightarrow x &= 2 - 2x \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{5}-3}{2} \\ \Leftrightarrow 2x+3 &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12x + 9 &= 5 \\ \Leftrightarrow x^2 &= -3x - 1 \end{aligned}$$

を得る。両辺を 2 乗して,

$$x^4 = 9x^2 + 6x + 1$$

を得る。以上より,

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 &= 9x^2 + 6x + 1 + x^2 \\ &= 10(-3x-1) + 6x + 1 \\ &= -24x - 9 \\ &= -12(\sqrt{5}-3) - 9 \\ &= 27 - 12\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 (2x^2 - x) dx - \int_1^0 (2x^2 - x) dx &= \int_{-2}^0 (2x^2 - x) dx + \int_0^1 (2x^2 - x) dx \\ &= \int_{-2}^1 (2x^2 - x) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^2 + 2x - 1) + (2x - 1)(2x + 2) \\ &= 6x^2 + 6x - 4 \end{aligned}$$

(5)

$$3 \log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{\frac{1}{2}} 27$$

$$2 \log_{\frac{1}{2}} 5 = \log_{\frac{1}{2}} 25$$

$$\frac{5}{2} \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} 32$$

対数の底が 1 よりも小さいことに注意すると, 3 数の大小は

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}} 32 &< \log_{\frac{1}{2}} 27 < \log_{\frac{1}{2}} 25 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2} \log_{\frac{1}{2}} 4 &< 3 \log_{\frac{1}{2}} 3 < 2 \log_{\frac{1}{2}} 5 \end{aligned}$$

となる。

(6)

$$2\vec{a} + 2\vec{b} = (-6, -8)$$

なので,

$$\begin{aligned} |2\vec{a} + 2\vec{b}| &= \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

となる。

(7)

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - 3n - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\ &= 4n - 5 \end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} a_1 &= S_1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

なので, $a_n = 4n - 5$ は $n = 1$ のときも成立する。

以上より, 求める一般項は $a_n = 4n - 5$ である。

(8)

[1] $\sin \theta \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$ のとき

$$|\sin \theta| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \sin \theta < \frac{1}{2}$$

なので,

$$0 \leq \theta < \frac{1}{6}\pi, \ \frac{5}{6}\pi < \theta \leq \pi$$

[2] $\sin \theta < 0 \Leftrightarrow \pi < \theta < 2\pi$ のとき

$$|\sin \theta| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \sin \theta < 0$$

なので,

$$\pi < \theta < \frac{7}{6}\pi, \ \frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$$

以上より, 不等式の解は

$$0 \leq \theta < \frac{1}{6}\pi, \ \frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{7}{6}\pi, \ \frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$$

である。

問題 2

(1)

l_1 と l_2 の式を連立し、 y を消去すると、

$$x^2 = -2x^2 + 3x + k$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x - k = 0$$

となる。この 2 次方程式の判別式を D とおくと、 l_1 と l_2 が接するのは、

$$D = 0$$

となる時であるから、

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-k) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 + 12k = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$$

を得る。よって、接点 P の x 座標は

$$3x^2 - 3x + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

となるので、接点 P の座標は

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad k = -\frac{3}{4}, \quad P: \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

(2)

線分 OP の垂直二等分線を l_3 とおく。すると、 $OQ = PQ$ となる点 Q は l_3 上にある。

直線 OP の傾きは $\frac{1}{2}$ なので、 l_3 の傾きは -2 である。

また、 l_3 は線分 OP の中点 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ を通るので、 l_3 の式は

$$y = -2\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}$$

$$= -2x + \frac{5}{8}$$

である。 l_2 と l_3 の交点が点 Q である。 l_2 と l_3 の式を連立し、 y を消去すると、

$$-2x^2 + 3x - \frac{3}{4} = -2x + \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 40x + 11 = 0$$

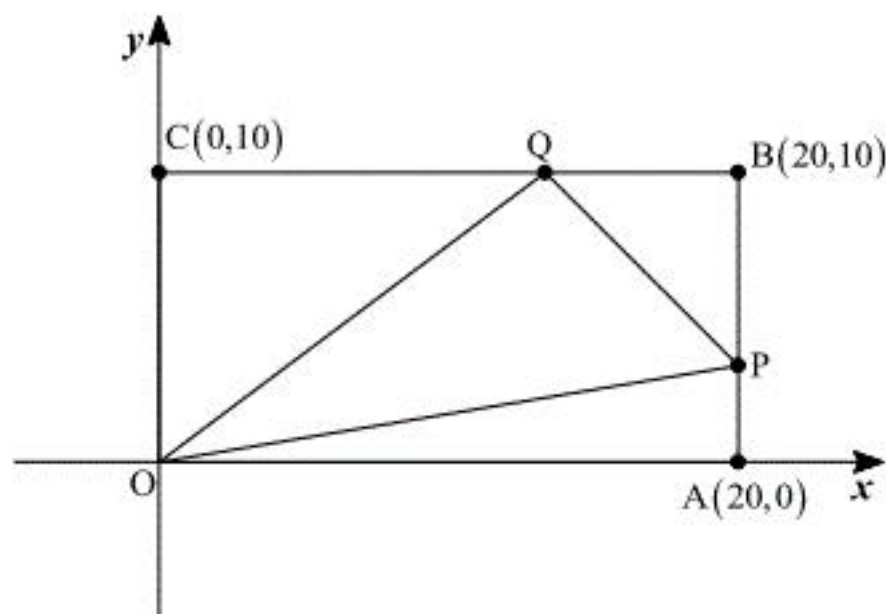
$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{14}}{4}$$

となり、これが求める点 Q の x 座標である。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{14}}{4}$$

問題 3

(1)



出発してから t 秒後の点 P, Q の座標はそれぞれ,

$$P(20, t), Q(20 - 2t, 10)$$

と表されるので, $\triangle OPQ$ の面積は,

$$\frac{1}{2} |20 \cdot 10 - t(20 - 2t)| = |t^2 - 10t + 100|$$

となる。点 P が B に達するのは 10 秒後なので, $0 \leq t \leq 10$ の範囲で最小値を考える。

$$\begin{aligned} |t^2 - 10t + 100| &= |(t - 5)^2 + 75| \\ &= (t - 5)^2 + 75 \end{aligned}$$

これより, $\triangle OPQ$ の面積が最小になるのは $t = 5$ のときであり,

そのときの面積は 75 である。

(答) 出発してから 5 秒後に, 最小の面積 75 となる。

(2)

出発してから t 秒後の $\triangle OPQ$ の重心の座標は,

$$\left(\frac{40 - 2t}{3}, \frac{t + 10}{3} \right)$$

と表される。

$$x = \frac{40 - 2t}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = \frac{t + 10}{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

とおく。

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow t = 20 - \frac{3}{2}x$$

となるので, これを $\textcircled{2}$ に代入して t を消去すると,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3} \left(20 - \frac{3}{2}x + 10 \right) \\ &= -\frac{1}{2}x + 10 \end{aligned}$$

を得る。また, $0 \leq t \leq 10$ であるから,

$$\frac{20}{3} \leq x \leq \frac{40}{3}$$

である。以上より, $\triangle OPQ$ の重心の軌跡は, 直線 $y = -\frac{1}{2}x + 10$ のうち, $\frac{20}{3} \leq x \leq \frac{40}{3}$ を満

たす部分である。

(答) 直線 $y = -\frac{1}{2}x + 10$ のうち, $\frac{20}{3} \leq x \leq \frac{40}{3}$ を満たす部分