

問題 1

- (1)
- 両辺を 2 乗すると、
- $$x^2+6x+9=4x^2 \Leftrightarrow 3(x-3)(x+1)=0$$
- となる。
- よって $x=-1, 3$ となるが、このうち与式を満たすのは、 $x=3$ である。
- (答) $x=3$

- (2)
- 2 つの解のうちの、素数解を p とし、与式にあてはめると、
- $$p^2-ap+66=0 \Leftrightarrow p(p-a)=-66$$
- となる。
- p, a が素数であることから、 $p, p-a$ は整数同士であるので p は 66 の約数となる。
- p は素数なので 2, 3, 11 のいずれかである。
- [1] $p=2$ のとき
- $p-a$ は -33 で、 $a=-35$ となり素数でないので不適である。
- [2] $p=3$ のとき
- $p-a$ は -22 で、 $a=-25$ となり素数でないので不適である。
- [3] $p=11$ のとき
- $p-a$ は -6 で、 $a=17$ となりたしかに素数である。
- $x^2-5x+66=0$ の 11 以外の解を求めると、6 であり素数ではないので題意を満たす。
- 以上、[1], [2], [3] より、 $a=17$ である。
- (答) $a=17$

- (3)
- BC の長さを x とする。
- 正弦定理より、
- $$\frac{x}{\sin A}=2R \Leftrightarrow x=2R \sin A$$
- となる。
- 計算すると、 $x=7\sqrt{3}$ となる。
- (答) $7\sqrt{3}$

- (4)
- 底を 10 として $\log$ をとると
- $$\begin{aligned}\log_{10} 12^{20} &= 20 \log_{10} 12 \\ &= 20(2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3)\end{aligned}$$
- となり、 $\log$ の近似値を使い、計算すると $\log_{10} 12^{20} = 21.5820$ となる。
- よって、 $10^{21} < 12^{20} < 10^{22}$ なので 12^{20} は 22 桁である。
- (答) 22 桁

- (5)
- すべてのくじを区別できるとすると、2 本の選び方は
- $${}_{15}C_2 = 105$$
- 通りある。
- つぎに、1 本もあたりがない選び方を数えると、
- $${}_{12}C_2 = 66$$
- 通りある。
- よって少なくとも 1 本のあたりがある選び方は、
- $$105 - 66 = 39$$
- 通りある。
- よって少なくとも 1 本あたる確率は $\frac{39}{105} = \frac{13}{35}$ である。
- (答) $\frac{13}{35}$

- (6)
- 原点を始点として
- $$\overrightarrow{AB} = (2, 3, 7), \quad \overrightarrow{AC} = (m-2, -3, n+2)$$
- となる。
- A, B, C が一直線上にあるということは、 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は平行であり、
- $$\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC} \quad (k \text{ は実数})$$
- とかける。
- $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の y 成分より $k = -1$ であるので、
- $$\begin{aligned}2 &= -m + 2 \Leftrightarrow m = 0 \\ 7 &= -n - 2 \Leftrightarrow n = -9\end{aligned}$$
- となる。
- (答) $(m, n) = (0, -9)$

- (7)
- $$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |x-1|(x-1) dx &= \int_{-2}^1 -(x-1)^2 dx + \int_1^2 (x-1)^2 dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{-2}^1 + \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^2 \\ &= -\frac{26}{3}\end{aligned}$$
- (答) $-\frac{26}{3}$

- (8)
- 余弦定理より AC の長さ x は
- $$\begin{aligned}x^2 &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ \\ &= 49\end{aligned}$$
- なので、 $x=7$ となる。
- これより $\triangle ACD$ は正三角形とわかり、DA の長さも 7 である。
- $\triangle ACD$ の面積は
- $$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{4}$$
- である。
- 一方 $\triangle ABC$ の面積は
- $$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$
- である。
- よって 2 つをたして、四角形 ABCD の面積 S は $16\sqrt{3}$ である。
- (答) $S = 16\sqrt{3}$

問題 2

(1)

すべての自然数 n について、 $0 < a_n \leq 2$ であることを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = 2$ よりたしかに $0 < a_n \leq 2$ は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき $0 < a_n \leq 2$ が成り立つと仮定する。(k は自然数であり $k \geq 1$)

このとき $a_{k+1} = \frac{2a_k}{1+a_k} = 2 - \frac{2}{1+a_k}$ であり、これと $0 < a_n \leq 2$ から

$$0 < a_{k+1} \leq \frac{4}{3} \text{ となるので}$$

$n=k+1$ でも $0 < a_n \leq 2$ は成り立つ。

以上より、数学的帰納法から、 $0 < a_n \leq 2$ である。

よって、すべての自然数 n で $a_n > 0$ であることが示された。

(証明終)

(2)

b_n は a_n の逆数なので、 $a_n > 0$ から $b_n > 0$ がいえる。したがって、

$$\begin{aligned} a_{k+1} = \frac{2a_k}{1+a_k} &\Leftrightarrow \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_k} \text{ (逆数をとった。)} \\ &\Leftrightarrow b_{n+1} = \frac{b_n + 1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad b_{n+1} = \frac{b_n + 1}{2}$$

(3)

(2) で得た式を変形すると

$$b_{n+1} = \frac{b_n + 1}{2} \Leftrightarrow b_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(b_n - 1)$$

となり、 $b_n - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b_1 - 1)$ が導ける。

ここで $b_1 = \frac{1}{2}$ より

$$b_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow a_n = \frac{2^n}{2^n - 1}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a_n = \frac{2^n}{2^n - 1}$$

問題 3

(1)

与式を x で微分すると,

$$y' = -2(x-2) \text{ となる。}$$

よって, 接線の公式より

$$y = -2(a-2)(x-a) - (a-2)^2 + 1 \Leftrightarrow y = -2(a-2)x + a^2 - 3$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = -2(a-2)x + a^2 - 3$$

(2)

PQ の長さは a である。

R の y 座標は, (1) で得た式から, $a^2 - 3$ となる。

よって QR の長さは

$$\begin{aligned} \left| \{-(a-2)^2 + 1\} - (a^2 - 3) \right| &= |-2a^2 + 4a| \\ &= |-2(a-1)^2 + 2| \end{aligned}$$

である。

$\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ なので, $-2(a-1)^2 + 2 > 0$ であり

QR の長さは $-2a^2 + 4a$ となる。

よって $\triangle PQR$ の面積は,

$$S = \frac{1}{2} a (-2a^2 + 4a) = -a^3 + 2a^2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = -a^3 + 2a^2$$

(3)

$f(a) = -a^3 + 2a^2$ とする。

$f'(a) = -3a^2 + 4a = -3a\left(a - \frac{4}{3}\right)$ であり, $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ で増減表を書くと以下のようなになる。

a	$\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

これより, $f(a)$ の最大値は $a = \frac{4}{3}$ のとき $\frac{32}{27}$ である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{4}{3} \text{ のとき } \frac{32}{27}$$