

問題 1

(1)

3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 6$ に対して $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$ であるから、 $f'(1) = 7, f'(-2) = 4$ のとき

$$\begin{cases} 3a+2b=7 \\ 12a-4b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

である。

(答) $a=1, b=2$

(2)

$$\frac{2-i}{1+2i} = \frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-5i}{5} = -i$$

と求まる。

(答) $-i$

(3)

$(2x^2 - 1)^6$ の展開式の一般項は ${}_6C_r (2x^2)^{6-r} \cdot (-1)^r$ すなわち ${}_6C_r 2^{6-r} \cdot (-1)^r \cdot x^{2(6-r)}$ である。

$2(6-r) = 4 \Leftrightarrow r = 4$ であることから、 x^4 の係数は

$${}_6C_4 2^{6-4} \cdot (-1)^4 = 60$$

と求まる。

(答) 60

(4)

はずれくじの本数は、

$$20 - (1 + 2 + 3) = 14 \text{ (本)}$$

であるから、賞金の期待値は

$$1000 \cdot \frac{1}{20} + 500 \cdot \frac{2}{20} + 300 \cdot \frac{3}{20} + 0 \cdot \frac{14}{20} = 145 \text{ (円)}$$

である。

(答) 145 円

(5)

$x = \frac{1}{3}$ のとき

$$|-x| = \frac{1}{3}$$

$$|x-1| = \frac{2}{3}$$

となることから、命題「 $x > 0 \Rightarrow |-x| > |x-1|$ 」は偽である。

(答) 偽, 反例: $x = \frac{1}{3}$

(6)

不等式 $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq 2^{20} - 2^{-3}$ を順に変形していくと、

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq 2^{20} - 2^{-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 \cdot (9^k - 1)}{9 - 1} \leq 2^{-3} (2^{23} - 1)$$

$$\Leftrightarrow 9^k \leq 2^{23}$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 9^k \leq \log_{10} 2^{23}$$

$$\Leftrightarrow 2k \log_{10} 3 \leq 23 \log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow k \leq \frac{23 \log_{10} 2}{2 \log_{10} 3} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ とすると $7 < \frac{23 \log_{10} 2}{2 \log_{10} 3} < 8$ であるから、 $\textcircled{1}$ を満たす最大の整数 k は $k = 7$ である。

(答) $k = 7$

(7)

与えられた 3 数は、それぞれ

$$\sqrt[12]{20000} = \sqrt[6]{\sqrt{20000}} = \sqrt[6]{100\sqrt{2}}$$

$$\sqrt[3]{6+4\sqrt{3}} = \sqrt[6]{(6+4\sqrt{3})^2} = \sqrt[6]{84+48\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[4]{4+\sqrt{2}} = \sqrt[6]{(4+\sqrt{2})^3} = \sqrt[6]{88+50\sqrt{2}}$$

と表わすことができる。ここで、 $\sqrt{2} < 1.5, 1.7 < \sqrt{3}$ という大小関係を利用すると

$$\begin{aligned} (88+50\sqrt{2}) - 100\sqrt{2} &= 88 - 50\sqrt{2} \\ &= 88 - 50 \cdot 1.5 \\ &> 88 - 75 \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (84+48\sqrt{3}) - (88+50\sqrt{2}) &= 48\sqrt{3} - 50\sqrt{2} - 4 \\ &> 48 \times 1.7 - 50 \times 1.5 - 4 \\ &= 2.6 \\ &> 0 \end{aligned}$$

である。以上のことから

$$\begin{aligned} 100\sqrt{2} &< 88+50\sqrt{2} < 84+48\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \sqrt[6]{100\sqrt{2}} &< \sqrt[6]{88+50\sqrt{2}} < \sqrt[6]{84+48\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \sqrt[12]{20000} &< \sqrt[4]{4+\sqrt{2}} < \sqrt[3]{6+4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $\sqrt[12]{20000} < \sqrt[4]{4+\sqrt{2}} < \sqrt[3]{6+4\sqrt{3}}$

(8)

$\overrightarrow{OC} = \frac{2}{5} \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{b}$ であり、点 P は 2 直線 AD, BC 上に存在する。以上のことから、 $\overrightarrow{OP}$ は実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OP} = (1 \square s) \frac{2}{5} \overrightarrow{a} + s \overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{OP} = (1 \square t) \overrightarrow{a} + t \frac{\square 2}{\square 3} \overrightarrow{b} \div \square$$

というように 2 通りで表わすことができる。 $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行でないから、

$$\begin{cases} \frac{2}{5}(1 \square s) = 1 \square t \\ s = \frac{2}{3} t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{6}{11} \\ t = \frac{9}{11} \end{cases}$$

である。よって $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{11} \overrightarrow{a} + \frac{6}{11} \overrightarrow{b}$ である。

(答) $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{11} \overrightarrow{a} + \frac{6}{11} \overrightarrow{b}$

問題 2

(1)

2つの放物線 C_1, C_2 の2つの交点の x 座標は

$$x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0$$

の解である。よって2つの交点の座標は $(-1, 1), (3, 9)$ である。ゆえに直線 l_1 の式は

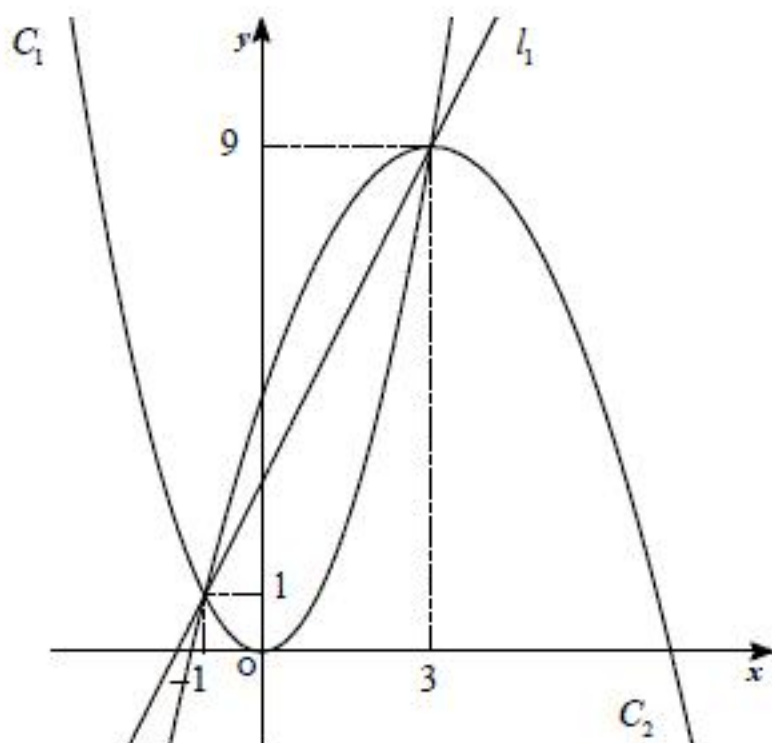
$$y-1 = \frac{9-1}{3-(-1)}\{x-(-1)\} \Leftrightarrow y = 2x+3$$

である。

(答) $y = 2x+3$

(2)

2つの放物線 C_1, C_2 と直線 l_1 をグラフに描くと、下図のようになる。



よって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^3 \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} \right) - x^2 \right\} dx \\ &= -\frac{3}{2} \int_{-1}^3 (x+1)(x-3) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-1}^3 \{ (2x+3) - x^2 \} dx \\ &= -\int_{-1}^3 (x+1)(x-3) dx \end{aligned}$$

である。ゆえに

$$S_1 : S_2 = \frac{3}{2} : 1 = 3 : 2$$

と求まる。

(答) $S_1 : S_2 = 3 : 2$

(3)

直線 l_2 は直線 l_1 と平行であるから、 l_2 の式は $y = 2x+b$ とおくことができる。また、問題より、 C_1 と l_2 で囲まれた面積があるので、2次方程式

$$2x+b = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - b = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

は2つの異なる実数解をもつ。それを α, β (ただし $\alpha < \beta$) とすると

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{ (2x+b) - x^2 \} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

と表わすことができる。 $S_3 = \frac{9}{2}$ のとき

$$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (\beta-\alpha)^3 = 3^3$$

であり、 $\beta-\alpha$ は実数であるから

$$\beta-\alpha = 3 \Leftrightarrow \beta = \alpha+3 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。ここで、①について解と係数の関係を考えると

$$\alpha+\beta = 2 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\alpha\beta = -b \quad \dots \textcircled{4}$$

であるから、②、③、④より

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{5}{2}, b = \frac{5}{4}$$

と求まる。以上より直線 l_2 の式は $y = 2x + \frac{5}{4}$ である。

(答) $y = 2x + \frac{5}{4}$

問題 3

(1)

$a > 0, b > 0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

である。

(証明終)

また、等号成立条件は

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \Leftrightarrow a = b$$

である。

(答) 等号成立条件: $a = b$

(2)

$$2\log_{10} u + \log_{10} v = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

について、真数条件より

$$u > 0, v > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。ここで、①の等式を順に変形していくと、条件②に注意し、

$$2\log_{10} u + \log_{10} v = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} (u^2 v) = 1$$

$$\Leftrightarrow u^2 v = 10$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{10}{u^2} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。よって、②より $u^3 > 0$ であることに注意し、(1)で証明した不等式を用いると、

$$\begin{aligned} u^3 + uv^2 &= u^3 + u \left(\frac{10}{u^2} \right)^2 \\ &= u^3 + \frac{100}{u^3} \\ &\geq 2\sqrt{u^3 \cdot \frac{100}{u^3}} = 20 \end{aligned}$$

となる。等号が成り立つのは

$$u^3 = \frac{100}{u^3} \text{ かつ } u > 0 \quad \therefore u = \sqrt[3]{10}$$

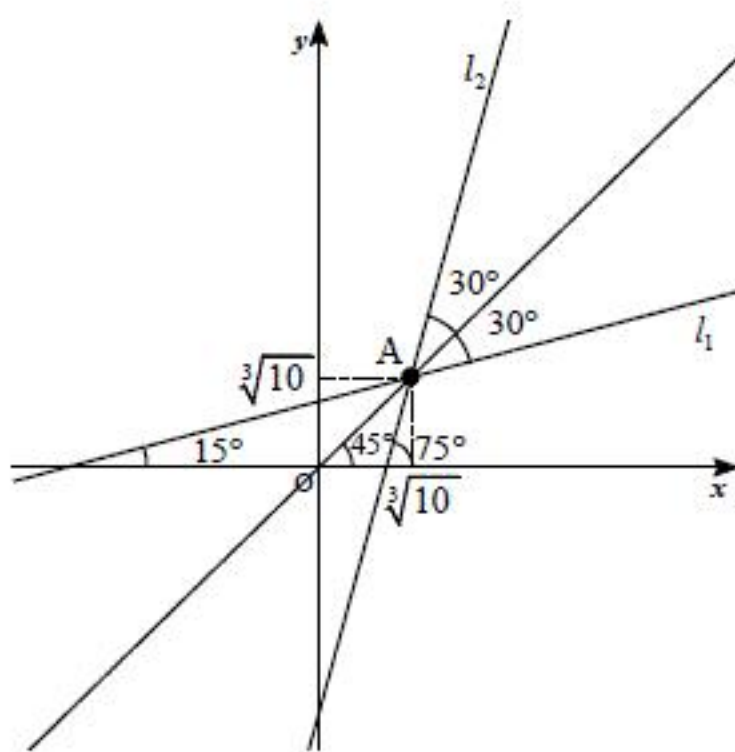
のときで、このとき、③より、 $v = \sqrt[3]{10}$ である。

以上より $u^3 + uv^2$ の最小値は 20 で、そのとき $u = v = \sqrt[3]{10}$ である。

(答) 最小値: 20 ($u = v = \sqrt[3]{10}$ のとき)

(3)

点 A の座標は $(\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{10})$ であるから、直線 OA の方程式は $y = x$ である。点 A を通りこの直線と 30° の角をなす直線は 2 本あり、それぞれを下グラフのように直線 l_1, l_2 とする。



ここで、加法定理より

$$\begin{aligned} \tan 15^\circ &= \tan(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\ &= 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 75^\circ &= \tan(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\ &= 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。よって、直線 l_1 の方程式は

$$y - \sqrt[3]{10} = (2 - \sqrt{3})(x - \sqrt[3]{10}) \Leftrightarrow y = (2 - \sqrt{3})x - \sqrt[3]{10}(1 - \sqrt{3})$$

であり、直線 l_2 の方程式は

$$y - \sqrt[3]{10} = (2 + \sqrt{3})(x - \sqrt[3]{10}) \Leftrightarrow y = (2 + \sqrt{3})x - \sqrt[3]{10}(1 + \sqrt{3})$$

である。

(答) $y = (2 - \sqrt{3})x - \sqrt[3]{10}(1 - \sqrt{3}), y = (2 + \sqrt{3})x - \sqrt[3]{10}(1 + \sqrt{3})$