

## 問題 1

(1)

与式を変形すると,

$$\begin{aligned}a_{n+2} - a_{n+1} &= 3(a_{n+1} - a_n) \\ \therefore b_{n+1} &= 3b_n\end{aligned}$$

であるから, 数列  $\{b_n\}$  は初項  $b_1 = a_2 - a_1 = 2$ , 公比 3 の等比数列である。よって,

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

(2)

(1)より,  $n \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned}a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} b_k + a_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1} + 2 \\ &= \frac{2(1-3^{n-1})}{1-3} + 2 \\ &= 3^{n-1} + 1\end{aligned}$$

である。これは  $n=1$  のときも成立する。

$$(\text{答}) \quad a_n = 3^{n-1} + 1$$

## 問題 2

(1)

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

である。  $0^\circ < \theta < 180^\circ$  のとき、  $\sin \theta > 0$  より  $\cos \theta < 0$  である。 よって、

$$\sin \theta - \cos \theta > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

であり、 $\textcircled{1}$ より、

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(2)

(1)の答と、  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$  を連立して解くと、

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \\ &= -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta = -2 - \sqrt{3}$$

### 問題 3

(1)

与式は,

$$(x-a)(x-2)<0$$

と変形できる。この不等式の解が $1<x<2$ となるような $a$ は

$$a=1$$

である。

(答)  $a=1$

(2)

$$3x^2+2x-1>0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(x+1)>0$$

$$\Leftrightarrow x<-1, \frac{1}{3}<x$$

である。 $a$ について場合分けする。 $a=2$ のときは $x^2-(a+2)x+2a<0$ が解を持たないので不適である。

[1]  $a>2$ のとき

$$x^2-(a+2)x+2a<0$$

$$\Leftrightarrow 2<x<a$$

である。よって、 $x^2-(a+2)x+2a<0$ と $3x^2+2x-1>0$ を同時に満たすのは,

$$2<x<a$$

である。これを満たす整数 $x$ がただ一つ存在するのは,

$$3<a\leq 4$$

のときである。

[2]  $\frac{1}{3}<a<2$ のとき

$$x^2-(a+2)x+2a<0$$

$$\Leftrightarrow a<x<2$$

である。よって、 $x^2-(a+2)x+2a<0$ と $3x^2+2x-1>0$ を同時に満たすのは,

$$a<x<2$$

である。これを満たす整数 $x$ がただ一つ存在するのは,

$$\frac{1}{3}<a<1$$

のときである。

[3]  $-1\leq a\leq \frac{1}{3}$ のとき

$x^2-(a+2)x+2a<0$ と $3x^2+2x-1>0$ を同時に満たすのは,

$$\frac{1}{3}<x<2$$

である。これを満たす整数 $x$ はただ一つしか存在しないので、 $-1\leq a\leq \frac{1}{3}$ である。

[4]  $a<-1$ のとき

$x^2-(a+2)x+2a<0$ と $3x^2+2x-1>0$ を同時に満たすのは,

$$a<x<-1, \frac{1}{3}<x<2$$

である。これを満たす整数 $x$ がただ一つ存在するのは,

$$-2\leq a<-1$$

のときである。

以上[1], [2], [3], [4]より,

$$-2\leq a<1, 3<a\leq 4$$

である。

(答)  $-2\leq a<1, 3<a\leq 4$