

問題 1

(1)

$$3x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\begin{aligned}\therefore x &= \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{11}i}{6}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5 \pm \sqrt{11}i}{6}$$

(2)

$$\begin{aligned}4 \cdot 2^{2x} - 2^{x+2} + 2 &= 4(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 2 \\ &= 4\left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\end{aligned}$$

となる。 $x \leq 2$ のとき、 $0 < 2^x \leq 4$ であるから、 $2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$ で最小値 1 をとり、

$2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ のとき最大値 50 をとる。

(答) 最小値: 1($x = -1$), 最大値: 50($x = 2$)

問題 2

(1)

先生の右隣に座る男子生徒の選び方は4通りで、他の席に生徒が座る場合の数は

$$\begin{aligned}8! &= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 40320\end{aligned}$$

となる。よって求める場合の数は

$$4 \times 40320 = 161280 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 161280 通り

(2)

先生の両隣に座る男子生徒の選び方と、その位置の場合の数は

$${}_4C_2 \times 2 = 12$$

となり、他の席に生徒が座る場合の数は

$$\begin{aligned}7! &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 5040\end{aligned}$$

となる。よって求める場合の数は

$$5040 \times 12 = 60480 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 60480 通り

(3)

この場合先生の両隣に女子生徒が座り、そこから一つおきに残りの女子生徒が座ることになる。よって求める場合の数は

$$\begin{aligned}5! \cdot 4! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 2880 \text{ (通り)}\end{aligned}$$

となる。

(答) 2880 通り

(4)

求める場合の数は

$$\begin{aligned}{}_9C_4 &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 126 \text{ (通り)}\end{aligned}$$

となる。

(答) 126 通り

(5)

求める場合の数は

$${}_5C_2 \times {}_4C_2 = 60 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 60 通り

問題 3

(1)

放物線 $y = 2x^2 + px + q$ が点 $(1, -1)$ を通るから

$$-1 = 2 \cdot 1^2 + p \cdot 1 + q$$

$$\Leftrightarrow p + q = -3 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 $y = 2x^2 + px + q$ より $y' = 4x + p$ であるから、点 $(1, -1)$ における接線の方程式は

$$y = (4 \cdot 1 + p)(x - 1) - 1$$

$$= (p + 4)x - p - 5$$

となる。これが原点を通るから

$$-p - 5 = 0$$

$$\therefore p = -5$$

となり、 $\textcircled{1}$ 式より

$$q = 2$$

を得る。

(答) $(p, q) = (-5, 2)$

(2)

(1)より、求める接線のうちの一つは

$$y = -x$$

である。直線 $x = 0$ は放物線と交わり接線とはなり得ないから、原点を通る接線の方程式は

$y = mx$ と表してよい。これが放物線

$$y = 2x^2 + px + q$$

$$= 2x^2 - 5x + 2$$

に接するとき、二式から y を消去した方程式

$$2x^2 - 5x + 2 = mx$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (m + 5)x + 2 = 0$$

の判別式が 0 に等しいから

$$(m + 5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 10m + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 9)(m + 1) = 0$$

$$\therefore m = -1, -9$$

となる。よって残りの接線は

$$y = -9x$$

となる。

(答) $y = -x, y = -9x$

(3)

$m = -9$ のとき、

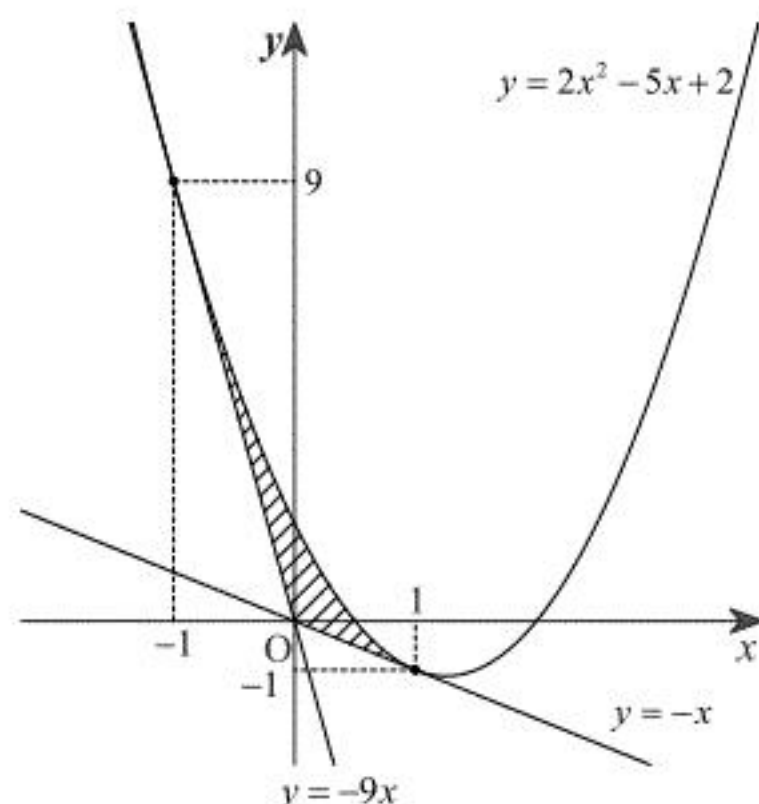
$$2x^2 - 5x + 2 = -9x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x + 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

となる。したがって、求める面積は下図の斜線部の領域の面積である。



よって求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (2x^2 - 5x + 2 + 9x) dx + \int_0^1 (2x^2 - 5x + 2 + x) dx &= \left[\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 2x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2x \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{4}{3}$

問題 4

(1)

数列を

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\} \dots$$

のように群に分ける。 $n \geq 2$ のとき、第 n 群1項目は、左から数えて

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k+1 &= \frac{1}{2}n(n-1)+1 \\ &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n+1 \quad (\text{番目}) \end{aligned}$$

である。これは $n=1$ でも成り立つ。したがって、 a_{50} は第10 群5 項目である。任意の n について、第 n 群 m 項目は 2^{m-1} であるから、

$$\begin{aligned} a_{50} &= 2^{5-1} \\ &= 16 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_{50} = 16$

(2)

第 n 群の項の合計は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2^{k-1} &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

となるから、第1 群から第 n 群までの合計は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2^k - 1) &= \frac{2^{n+1} - 2}{2 - 1} - n \\ &= 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} a_k &= (2^{50+1} - 50 - 2) + \sum_{k=1}^5 2^{k-1} \\ &= 1013 + 31 \\ &= 1044 \end{aligned}$$

となる。

(答) 1044

(3)

a_m と a_{m+1} が同じ群に属するとき、 $a_{m+1} > a_m$ であるから $a_m - a_{m+1} < 0$ である。よって a_m と a_{m+1} は違う群に属し、 $a_{m+1} = 1$ であり、 a_m は第 n 群第 n 項であり $a_m = 2^{n-1}$ となる。このとき

$$\begin{aligned} a_m - a_{m+1} &> 99999 \\ \Leftrightarrow 2^{n-1} &> 100000 \\ \Leftrightarrow \log_{10} 2^{n-1} &> 5 \\ \Leftrightarrow (n-1) \times 0.3010 &> 5 \\ \Leftrightarrow n &> \frac{5}{0.3010} + 1 = 17.6 \dots \end{aligned}$$

となる。これを満たす最小の n は $n=18$ であり、このとき

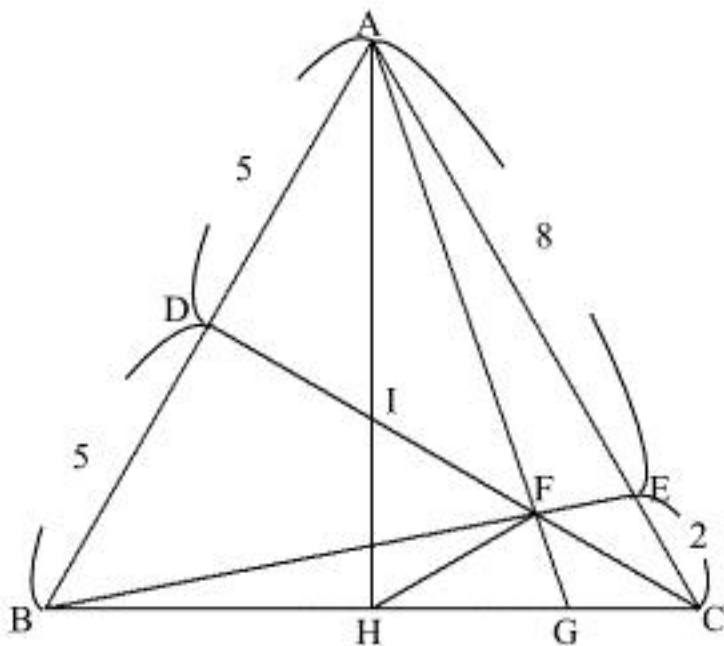
$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n+1+n-1 \\ &= 171 \end{aligned}$$

となり、これが求める値である。

(答) $m = 171$

問題 5

(1)



△ABC と点 F について、チェバの定理により

$$\frac{DB}{AD} \cdot \frac{GC}{BG} \cdot \frac{EA}{CE} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{GC}{BG} = \frac{1}{4}$$

となる。したがって、

$$BG = 10 \cdot \frac{4}{1+4}$$

$$= 8$$

となる。

(答) 8

(2)

△ABG に余弦定理を用いて

$$AG^2 = AB^2 + BG^2 - 2AB \cdot BG \cos \angle ABG$$

$$= 100 + 64 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 84$$

$$\therefore AG = 2\sqrt{21}$$

を得る。△ABC は正三角形で D は線分 AB の中点であるから、 $\angle ACD = \angle BCD$ となる。よって、△ACG について、角の二等分線の定理から

$$CA : CG = FA : FG$$

を得る。したがって、

$$GF = AG \cdot \frac{2}{10+2}$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{3}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{21}}{3}$

(3)

点 I は△ABC の重心であるから

$$AI : IH = 2 : 1$$

である。ここで、

$$AH = AB \sin 60^\circ$$

$$= 5\sqrt{3}$$

であるから、

$$IH = 5\sqrt{3} \cdot \frac{1}{1+2}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

となる。

(答) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

(4)

(1)から

$$GH = BG - BH$$

$$= 3$$

である。また、(2)(3)から

$$AF : FG = 5 : 1$$

$$AI : IH = 2 : 1$$

であるから、△IFH の面積は△ABC の

$$\frac{HG}{BC} \cdot \frac{AF}{AG} \cdot \frac{HI}{AH} = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{12}$$

であるから、求める面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \sin 60^\circ \cdot \frac{1}{12} = \frac{25\sqrt{3}}{12}$$

となる。

(答) $\frac{25\sqrt{3}}{12}$