

問題 1

【解答】

(1)

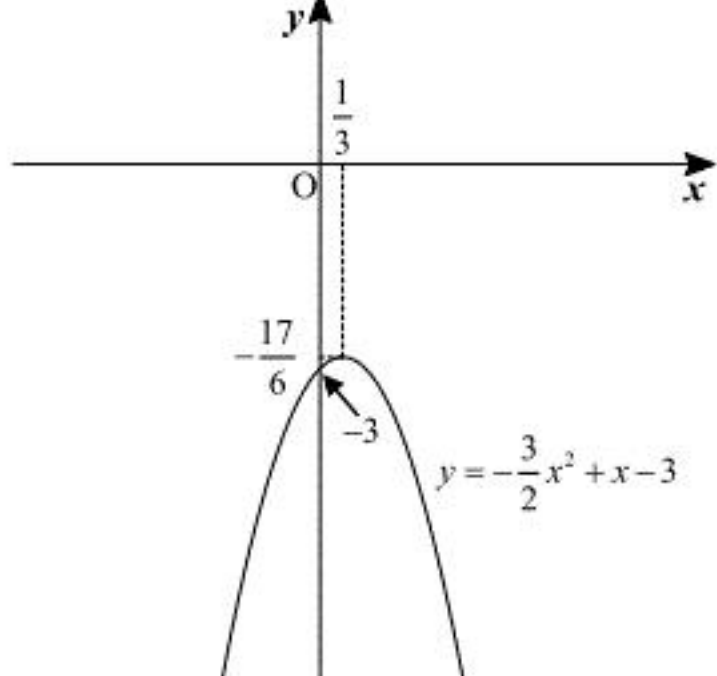
放物線 A をグラフとする 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とおくと、この放物線は 3 点 $(-2, -11)$ 、 $(2, -7)$ 、 $(4, -23)$ を通ることから、実数 a, b, c は

$$\begin{cases} -11 = 4a - 2b + c \\ -7 = 4a + 2b + c \\ -23 = 16a + 4b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

と求まる。よって、求める 2 次関数は $y = -\frac{3}{2}x^2 + x - 3$ となり、これを平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{2}x^2 + x - 3 \\ &= -\frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{17}{6} \end{aligned}$$

となるから、放物線 A を図示すると以下の図のようになる。



(答) 2 次関数: $y = -\frac{3}{2}x^2 + x - 3$, 放物線 A の図示: 前図

(2) ①: $y = \frac{3}{2}x^2 - x + 3$, ②: $y = -\frac{3}{2}x^2 - x - 3$, ③: $y = \frac{3}{2}x^2 + x + 3$

(3) (答) ①: 最大値 7, 最小値 $\frac{17}{6}$, ②: 最大値 -3, 最小値 -11, ③: 最大値 11, 最小値 3

【解説】

(2)

① x 軸について対称移動

x 軸に関して対称移動した場合、対称移動した後の点の座標を (X, Y) とおくと、対称移動する前の点の座標は $(X, -Y)$ であり、この点が放物線 A 上にあることから、関係式

$$-Y = -\frac{3}{2}X^2 + X - 3 \Leftrightarrow Y = \frac{3}{2}X^2 - X + 3$$

を満たす。よって、得られる放物線をグラフとする 2 次関数は $y = \frac{3}{2}x^2 - x + 3$ となる。

② y 軸について対称移動

y 軸に関して対称移動した場合、対称移動した後の点の座標を (X, Y) とおくと、対称移動する前の点の座標は $(-X, Y)$ であり、この点が放物線 A 上にあるから、関係式

$$Y = -\frac{3}{2}(-X)^2 + (-X) - 3 \Leftrightarrow Y = -\frac{3}{2}X^2 - X - 3$$

を満たす。よって、得られる放物線をグラフとする 2 次関数は $y = -\frac{3}{2}x^2 - x - 3$ となる。

③ 原点について対称移動

原点に関して対称移動した場合、対称移動した後の点の座標を (X, Y) とおくと、対称移動する前の点の座標は $(-X, -Y)$ であり、この点が放物線 A 上にあるから、関係式

$$-Y = -\frac{3}{2}(-X)^2 + (-X) - 3 \Leftrightarrow Y = \frac{3}{2}X^2 + X + 3$$

を満たす。よって、得られる放物線をグラフとする 2 次関数は $y = \frac{3}{2}x^2 + x + 3$ となる。

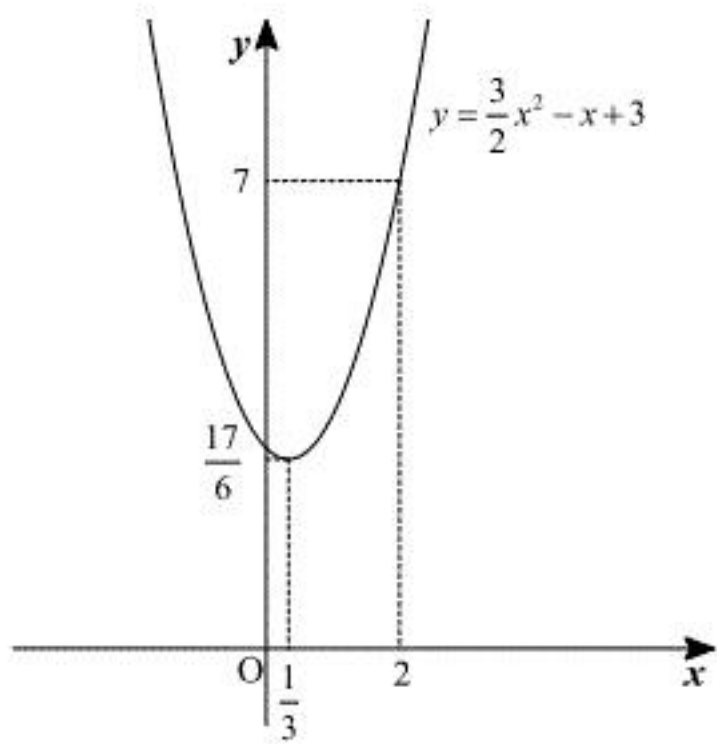
(3)

① 2 次関数 $y = \frac{3}{2}x^2 - x + 3$ の $0 \leq x \leq 2$ における最大値, 最小値

この場合の 2 次関数を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2}x^2 - x + 3 \\ &= \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{17}{6} \end{aligned}$$

となるから、これを図示すると以下の図のようになる。



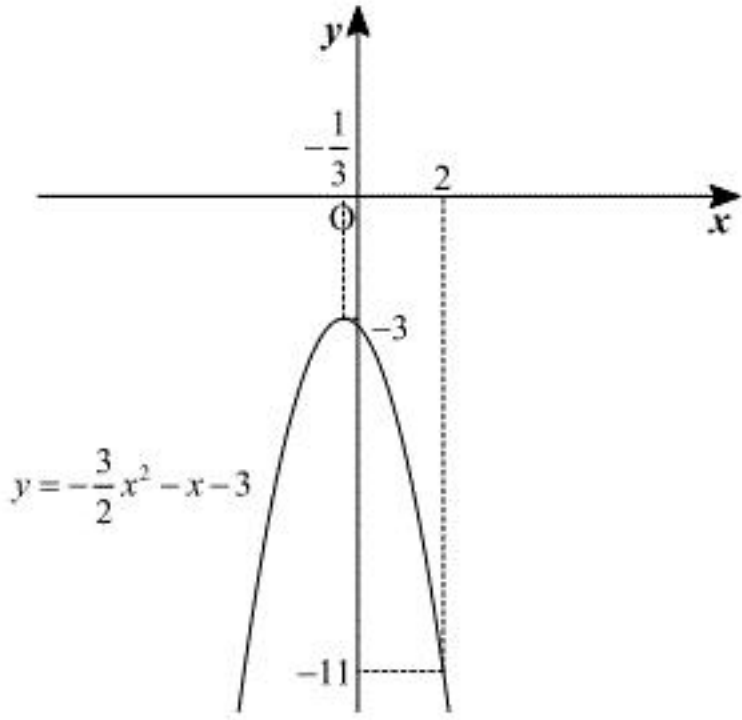
したがって、 $x=2$ のとき最大値 7 をとり、 $x=\frac{1}{3}$ のとき最小値 $\frac{17}{6}$ をとることがわかる。

② 2 次関数 $y = -\frac{3}{2}x^2 - x - 3$ の $0 \leq x \leq 2$ における最大値, 最小値

この場合の 2 次関数を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{2}x^2 - x - 3 \\ &= -\frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{17}{6} \end{aligned}$$

となるから、これを図示すると以下の図のようになる。



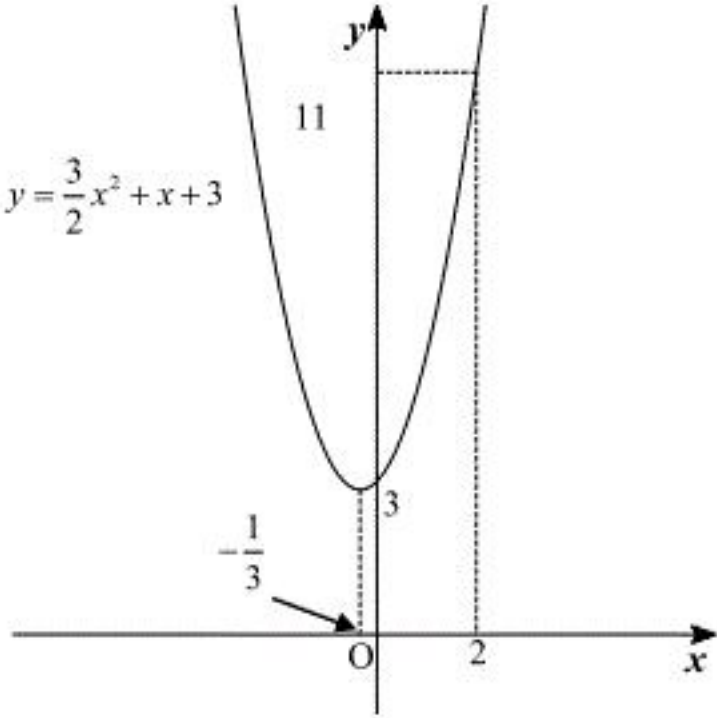
したがって、 $x=0$ のとき最大値 -3 をとり、 $x=2$ のとき最小値 -11 をとることがわかる。

③ 2 次関数 $y = \frac{3}{2}x^2 + x + 3$ の $0 \leq x \leq 2$ における最大値, 最小値

この場合の 2 次関数を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2}x^2 + x + 3 \\ &= \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{17}{6} \end{aligned}$$

となるから、これを図示すると以下の図のようになる。



したがって、 $x=2$ のとき最大値 11 をとり、 $x=0$ のとき最小値 3 をとることがわかる。

問題 2

等式 $3^x = 2^y = a$ を変形すると

$$3^x = 2^y = a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = a \\ 2^y = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 a \\ y = \log_2 a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\log a}{\log 3} \\ y = \frac{\log a}{\log 2} \end{cases}$$

となるから、これを等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{3y} = \frac{2}{3}$ に代入することで

$$\frac{\log 3}{\log a} + \frac{\log 2}{3 \log a} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3 \log 3 + \log 2 - 2 \log a = 0 \quad \text{かつ} \quad \log a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \log a = \log (3^3 \cdot 2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore a = 3\sqrt{6}$$

を得る。

(答) $a = 3\sqrt{6}$

問題 3

(1)

与えられた関数 $f(x) = (x+1)^3 - \frac{3}{2}k(x+1)^2 + 2$ の導関数を計算すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x+1)^2 - 3k(x+1) \\ &= 3\{x - (-1)\}\{x - (k-1)\} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $k > 0$ より $-1 < k-1$ であることに注意すると、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$k-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって、 $f(x)$ は $x = -1$ のとき極大値 $f(-1) = 2$ をとり、 $x = k-1$ のとき極小値

$f(k-1) = -\frac{1}{2}k^3 + 2$ をとることがわかる。

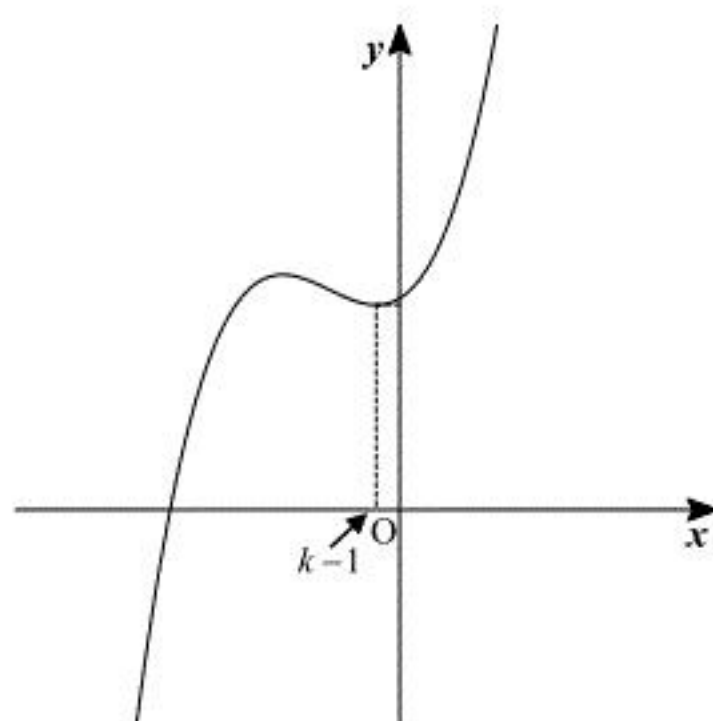
(答) 極大値： 2 ($x = -1$)，極小値： $-\frac{1}{2}k^3 + 2$ ($x = k-1$)

(2)

(1)における考察より、曲線 $y = f(x)$ ($x \geq 0$) のグラフは $k-1$ と 0 の大小によって形状が変わることに注意する。以下 k の値によって場合分けをして、すべての $x \geq 0$ に対して $f(x) \geq 0$ が成り立つ k の条件を考えることにする。

[1] $0 < k \leq 1$ のとき

曲線 $y = f(x)$ ($x \geq 0$) のグラフは $x = 0$ で最小値 $f(0) = -\frac{3}{2}k + 3$ をとる。



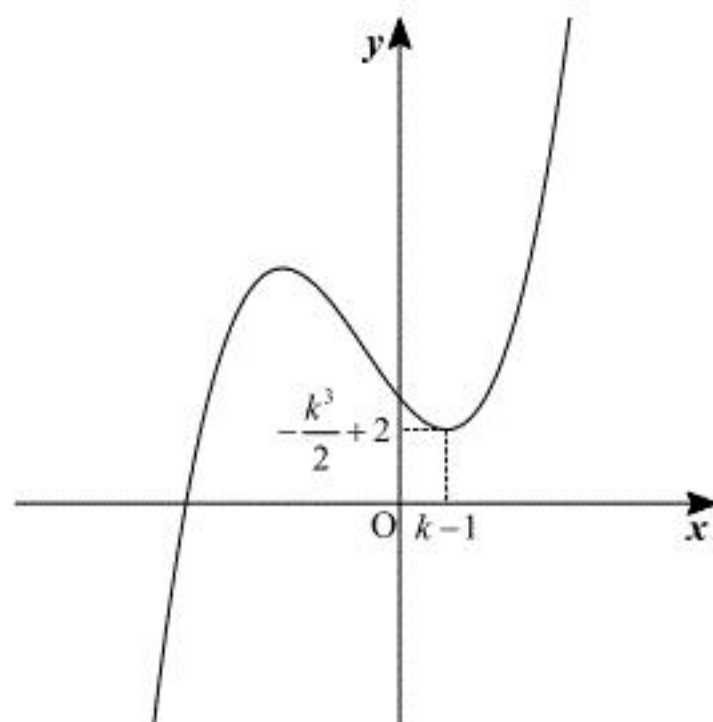
したがって、すべての $x \geq 0$ に対して、 $f(x) \geq 0$ が成り立つための条件は

$$\begin{aligned} f(0) \geq 0 &\Leftrightarrow -\frac{3}{2}k + 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow k \leq 2 \end{aligned}$$

となるが、これは $0 < k \leq 1$ で成り立つことがわかる。

[2] $k > 1$ のとき

曲線 $y = f(x)$ ($x \geq 0$) のグラフは $x = k-1$ で最小値 $f(k-1) = -\frac{k^3}{2} + 2$ をとる。



したがって、すべての $x \geq 0$ に対して、 $f(x) \geq 0$ が成り立つための条件は

$$\begin{aligned} f(k-1) \geq 0 &\Leftrightarrow -\frac{k^3}{2} + 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow k \leq \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

となるため、 $k > 1$ と合わせると $1 < k \leq \sqrt[3]{4}$ となる。

以上[1],[2]より、求める k の条件は $0 < k \leq \sqrt[3]{4}$ であることがわかる。

(答) $0 < k \leq \sqrt[3]{4}$

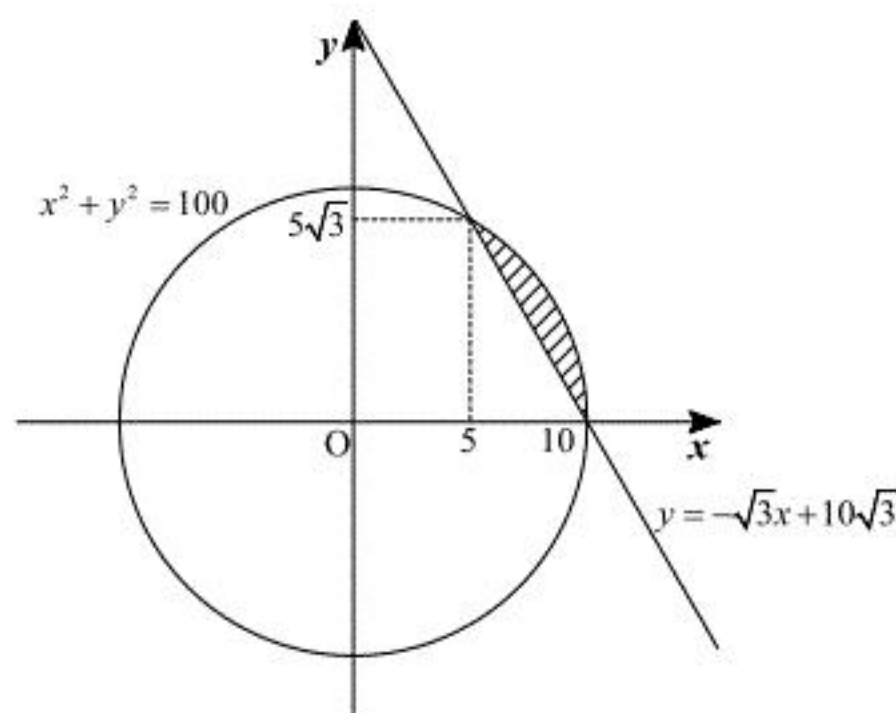
問題 4

(1)

円 $x^2 + y^2 = 100$ と直線 $y = -\sqrt{3}x + 10\sqrt{3}$ の交点は、連立方程式を解くことで

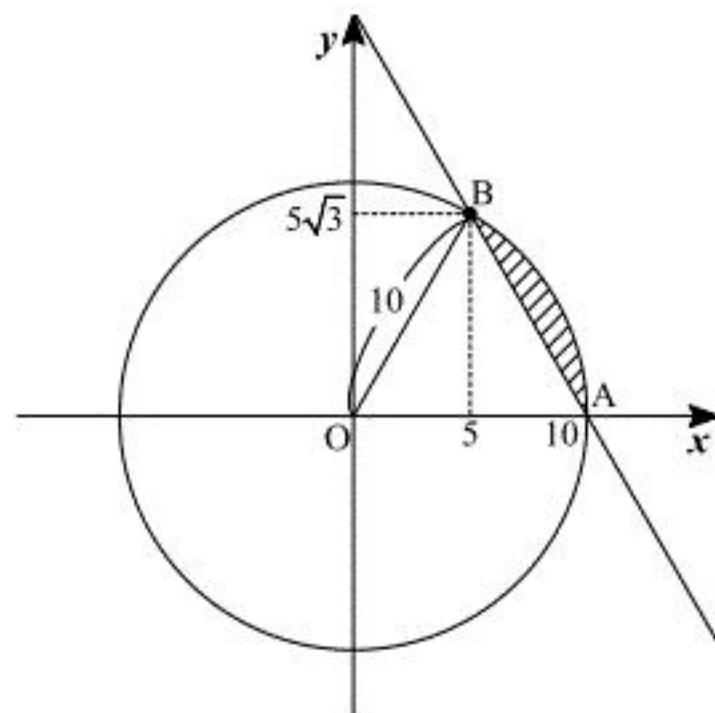
$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = -\sqrt{3}x + 10\sqrt{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-\sqrt{3}x + 10\sqrt{3})^2 = 100 \\ y = -\sqrt{3}x + 10\sqrt{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 60x + 200 = 0 \\ y = -\sqrt{3}x + 10\sqrt{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x-10) = 0 \\ y = -\sqrt{3}x + 10\sqrt{3} \end{cases} \\ &\therefore (x, y) = (5, 5\sqrt{3}), (10, 0) \end{aligned}$$

と求まるから、領域 D を図示すると以下の図の斜線部(境界を含む)のようになる。



(答) 前図の斜線部(境界を含む)

(2)



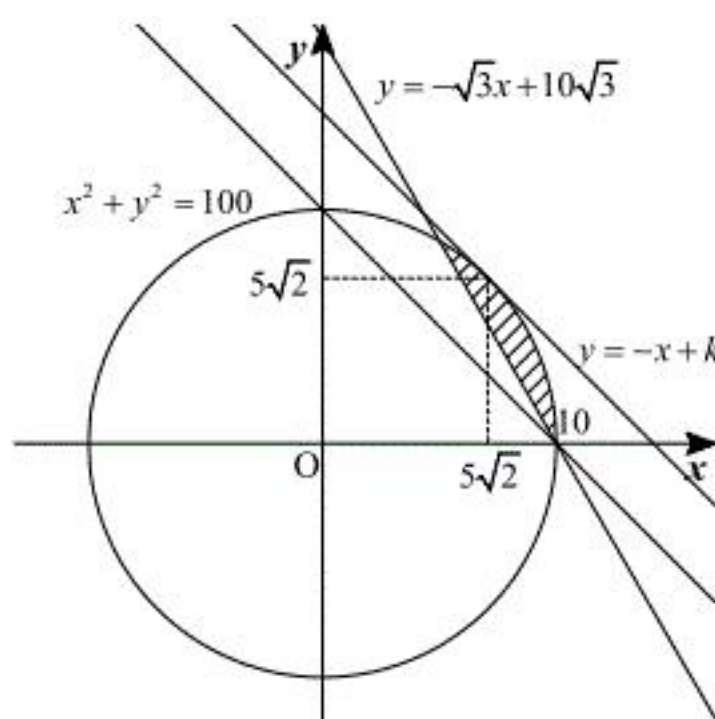
上図のように 2 点 $A(10, 0)$, $B(5, 5\sqrt{3})$ を定めると、 $\triangle OAB$ は正三角形となり $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ であることがわかる。ここで、領域 D の面積は扇形 OAB の面積から $\triangle OAB$ の面積を引いたものであるから

$$\frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{50}{3} \pi - 25\sqrt{3}$$

と求まる。

(答) $\frac{50}{3} \pi - 25\sqrt{3}$

(3)



$x + y = k$ とおくとき、 k のとりうる値の最大値と最小値を求めればよい。これを変形すると

$$x + y = k \Leftrightarrow y = -x + k$$

となるから、直線 $y = -x + k$ と領域 D が共有点をもつという条件のもとで、直線 $y = -x + k$ の y 切片 k が最大、最小となるような場合を考えればよい。

[1] $x + y$ の最大値について

円 $x^2 + y^2 = 100$ と直線 $x + y = k$ が接するような k の値は、点と直線の距離公式より

$$\begin{aligned} &\frac{|0 + 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 10 \\ &\therefore k = \pm 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

と求まり、 $k = 10\sqrt{2}$ のときの接点 $(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$ は領域 D 内に含まれるから、上図より

$x + y$ の最大値は $10\sqrt{2}$ であることがわかる。

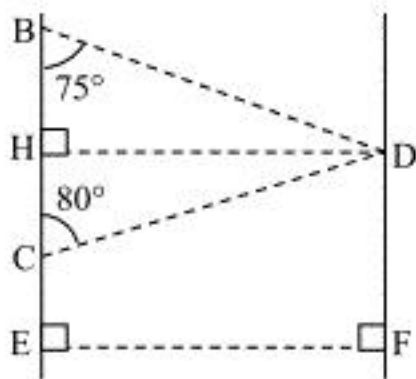
[2] $x + y$ の最小値について

直線 $y = -x + k$ の傾き -1 は直線 $y = -\sqrt{3}x + 10\sqrt{3}$ の傾き $-\sqrt{3}$ より大きいから、上図より直線 $y = -x + k$ が点 $(10, 0)$ を通るとき k は最小値 10 をとることがわかる。

(答) 最大値: $10\sqrt{2}$, 最小値: 10

問題 5

(1)



地点 D から左岸に下した垂線の足を H とおく。川幅は一定であるから、 $EF = DH = x$ とおくと、 $\triangle DHC$ と $\triangle DHB$ に注目することで

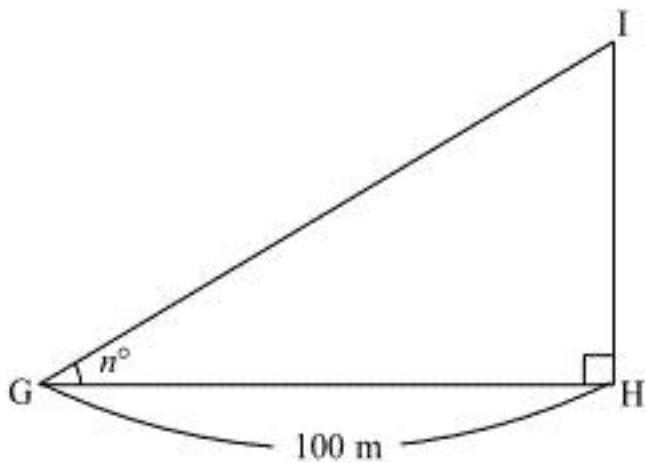
$$\begin{aligned} \frac{x}{\tan 80^\circ} + \frac{x}{\tan 75^\circ} &= 84.6 \\ \Leftrightarrow x &= 84.6 \cdot \frac{3.732 \cdot 5.671}{3.732 + 5.671} \\ \therefore x &= 190.4 \dots \end{aligned}$$

を得る。したがって、小数第 1 位を四捨五入すると 190 m となる。

(答) 190 m

(2)

自然数 n を用いて $\angle IGH = n^\circ$ とおく。問題文の条件より、 $IH \geq 13$ を満たすような最小の n を求めればよい。



上図より、三角関数の定義から

$$\begin{aligned} IH &= GH \cdot \tan \angle IGH \\ &= 100 \cdot \tan n^\circ \end{aligned}$$

となるから、求める自然数 n は、条件

$$\begin{aligned} IH &\geq 13 \\ \Leftrightarrow \tan n^\circ &\geq 0.13 \end{aligned}$$

を満たす最小の n である。よって、問題文の三角比の表より求める値は $n = 8$ であることがわかる。

(答) 8 度