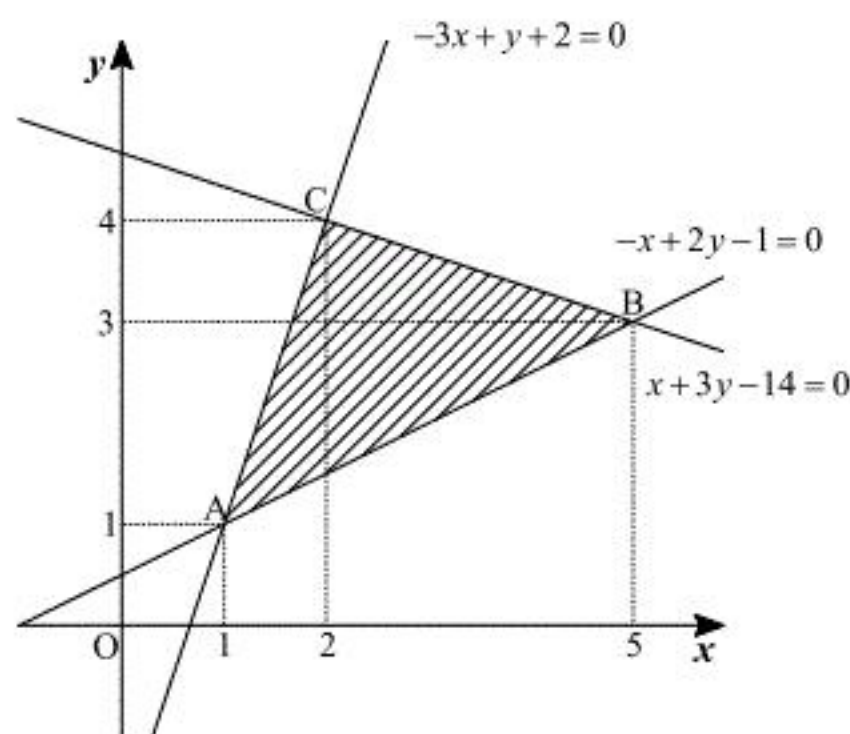


問題 1

(1)

$-x+2y-1=0$, $-3x+y+2=0$ の交点は $(1, 1)$ となる。また, $-x+2y-1=0$, $x+3y-14=0$ の交点は $(5, 3)$ となる。また, $-3x+y+2=0$, $x+3y-14=0$ の交点は $(2, 4)$ となる。したがって, 求める領域 D を図示すると以下ようになる。



上図のように点 A, B, C を定めると,

$$\overrightarrow{AB} = (5-1, 4-2) = (4, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-1, 4-1) = (1, 3)$$

となる。以上より, 求める面積 D は

$$D = \frac{1}{2} \cdot |3 \cdot 4 - 1 \cdot 2| = 5$$

となる。

(答) 5

(2)

実数 k を用いて $\frac{y}{x} = k$ とおく。このとき, k は直線 $y = kx$ の傾きであり, この直線は原点を通る。(1)のグラフより, この直線と領域 D が共有点をもち, 傾きが最小になるには, $y = kx$ が点 B を通るときである。したがって, 求める k は $\frac{3}{5}$ であり, そのときは $(x, y) = (5, 3)$ となる。

(答) $\frac{y}{x} = \frac{3}{5}, (x, y) = (5, 3)$

問題 2

(1)

$y = x^2 + ax + b$ を平方完成すると、

$$\begin{aligned} y &= x^2 + ax + b \\ &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって、この2次関数は $y = x^2$ を x 軸方向に $-\frac{a}{2}$ 、 y 軸方向に $b - \frac{a^2}{4}$ 平行移動したものである。

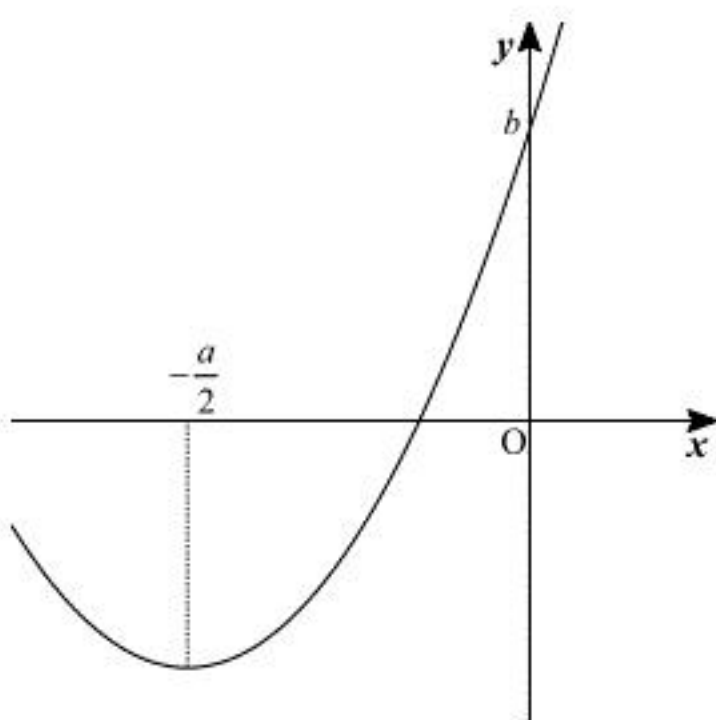
(答) x 軸方向に $-\frac{a}{2}$ 、 y 軸方向に $b - \frac{a^2}{4}$ 平行移動したもの

(2)

軸の値によって場合分けして考える。

[1] $-\frac{a}{2} < 0 \Leftrightarrow a > 0$ のとき

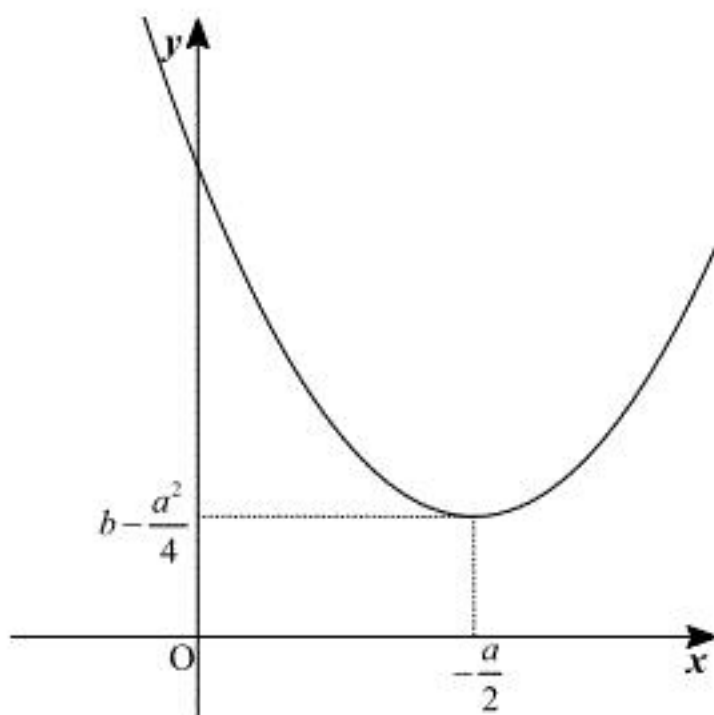
このとき $y = x^2 + ax + b$ を図示すると以下のようになる。



$x \geq 0$ のすべての x の値に対して $x^2 + ax + b \geq 0$ が成立するには、 y 切片が0以上だとよいから、 $b \geq 0$ である。

[2] $-\frac{a}{2} \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$ のとき

このとき $y = x^2 + ax + b$ を図示すると以下のようになる。



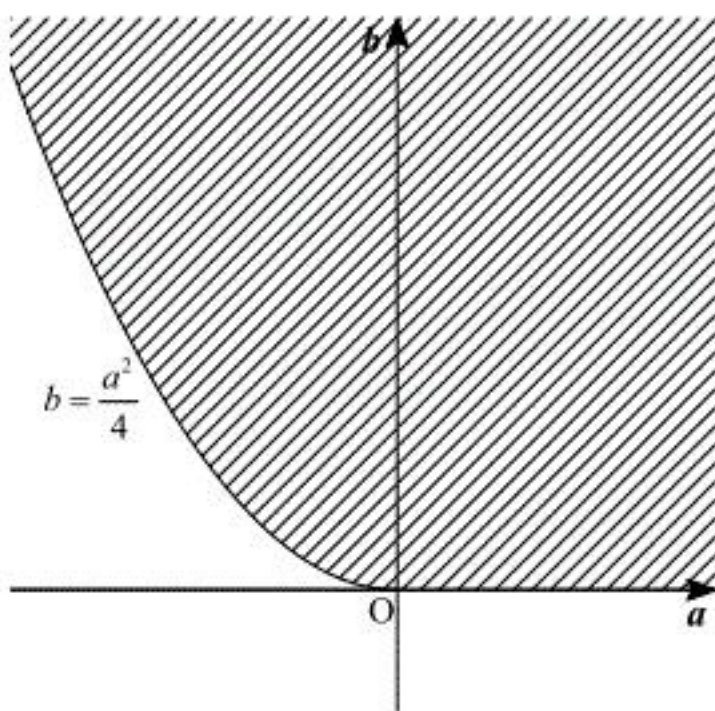
$x \geq 0$ のすべての x の値に対して $x^2 + ax + b \geq 0$ が成立するには、頂点の y 座標が0以上だとよいから、 $b - \frac{a^2}{4} \geq 0$ である。

以上より、 $a > 0$ のとき $b \geq 0$ であり、 $a \leq 0$ のとき $b - \frac{a^2}{4} \geq 0$ である。

(答) $a > 0$ のとき $b \geq 0$ 、 $a \leq 0$ のとき $b - \frac{a^2}{4} \geq 0$

(3)

$a > 0$ のとき $b \geq 0$ 、 $a \leq 0$ のとき $b - \frac{a^2}{4} \geq 0$ を図示すると以下のようになる。ただし領域には境界も含む。



(答) 前図

問題 3

(1)

$x^2 - (2a^2 + 1)x + a^4 + a^2 < 0$ を解くと,

$$x^2 - (2a^2 + 1)x + a^4 + a^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a^2)(x - a^2 - 1) < 0$$

$$\therefore a^2 < x < a^2 + 1 (\because 0 \leq a^2 < a^2 + 1)$$

が得られる。

(答) $a^2 < x < a^2 + 1$

(2)

真数条件より, $x > 0$ である。ここで $(\log_{16} x) \left(\log_{\frac{1}{2}} x^4 \right) + 1 < 0$ を解くと,

$$(\log_{16} x) \left(\log_{\frac{1}{2}} x^4 \right) + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 16} \cdot \frac{\log_2 x^4}{\log_2 \frac{1}{2}} + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_2 x \cdot (-4 \log_2 x) + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 > 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x < -1, 1 < \log_2 x$$

が得られる。これと $x > 0$ より,

$$\log_2 x < -1, 1 < \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}, 2 < x$$

が得られる。

(答) $0 < x < \frac{1}{2}, 2 < x$

(3)

①と②を同時に満たす x が存在しない a の範囲は, $a^2 < x < a^2 + 1$ が $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ に含まれれば

よい。したがって, $\frac{1}{2} \leq a^2$ かつ $a^2 + 1 \leq 2$ を変形すると

$$\frac{1}{2} \leq a^2 \text{ かつ } a^2 + 1 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq a \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ または } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 1$$

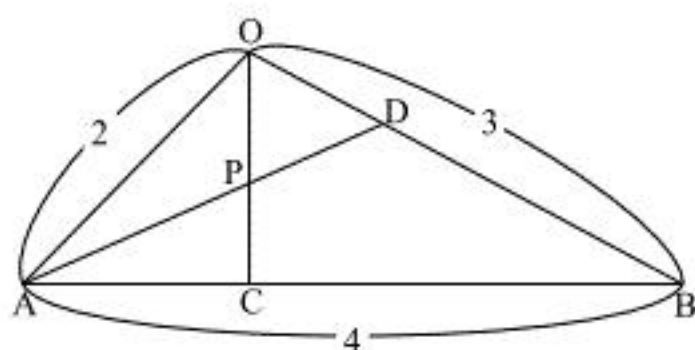
したがって, 求める a の範囲は $a < -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 < a$ である。

(答) $a < -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 < a$

問題 4

(1)

三角形 OAB を図示すると以下のようになる。



△OAB について余弦定理より,

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} \\ &= \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。したがって、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle AOB \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2}$$

(2)

(1)の図のように、点 O から辺 AB に下した垂線の足を C、 $\angle OAB$ の二等分線と辺 OB との交点を D とおく。実数 t を用いて $AC:CB = t:1-t$ とおくと、 $\overrightarrow{OC}$ は

$$\overrightarrow{OC} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

とかける。ここで、 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$ は垂直であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-2t)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 - (1-t)|\vec{a}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-2t) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + t \cdot 3^2 - (1-t) \cdot 2^2 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{11}{32}\end{aligned}$$

が得られる。点 P は OC 上であるから、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= k\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{21}{32}k\vec{a} + \frac{11}{32}k\vec{b}\end{aligned}$$

となる。また、AD は $\angle OAB$ の二等分線であるから、角の二等分線の性質より

$BD:DO = AB:OA = 2:1$ である。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{2}{3}(-\vec{a}) + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) \\ &= -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

となる。点 P は AD 上であるから、実数 l を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= l\overrightarrow{AD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} - \vec{a} &= -l\vec{a} + \frac{1}{3}l\vec{b} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} &= (1-l)\vec{a} + \frac{1}{3}l\vec{b}\end{aligned}$$

が得られる。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから

$$\begin{cases} \frac{21}{32}k = 1-l \\ \frac{11}{32}k = \frac{1}{3}l \end{cases}$$

$$\therefore k = \frac{16}{27}, l = \frac{33}{54}$$

である。以上より、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{7}{18}\vec{a} + \frac{11}{54}\vec{b}$$

が得られる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{7}{18}\vec{a} + \frac{11}{54}\vec{b}$$

問題 5

(1)

$G(a)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} G(a) &= \int_0^1 (3x+a)^2 dx \\ &= \int_0^1 (9x^2 + 6ax + a^2) dx \\ &= \left[3x^3 + 3ax^2 + a^2x \right]_0^1 \\ &= a^2 + 3a + 3 \end{aligned}$$

が得られる。

$$(答) \quad G(a) = a^2 + 3a + 3$$

(2)

$H(a)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} H(a) &= a \{ G(a) - 2 \} \\ &= a(a^2 + 3a + 3 - 2) \\ &= a^3 + 3a^2 + a \end{aligned}$$

となる。これを a について微分すると,

$$\begin{aligned} H'(a) &= 3a^2 + 6a + 1 \\ &= 3 \left(a - \frac{-3 + \sqrt{6}}{3} \right) \left(a - \frac{-3 - \sqrt{6}}{3} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $-1 \leq a \leq 1$ での増減表は以下のようになる。

a	-1	...	$\frac{-3 + \sqrt{6}}{3}$	...	1
$H'(a)$		-	0	+	
$H(a)$	1	$\searrow$	$1 - \frac{4}{9}\sqrt{6}$	$\nearrow$	5

したがって、最大値は $5(a=1)$ 、最小値は $1 - \frac{4}{9}\sqrt{6} \left(a = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3} \right)$ である。

$$(答) \quad \text{最大値 } 5(a=1), \text{ 最小値 } 1 - \frac{4}{9}\sqrt{6} \left(a = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3} \right)$$