

問題 1

(1)

$$2\cos\theta + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta \geq -\frac{1}{2}$$

となるから、 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき

$$0 \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi \quad \text{または} \quad \frac{4}{3}\pi \leq \theta < 2\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi \quad \text{または} \quad \frac{4}{3}\pi \leq \theta < 2\pi$$

(2)

$$y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

となり

$$0 \leq x < 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$$

であるから y の最大値は $\sqrt{2}$ であり、そのときの x の値は

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

となる。また、 y の最小値は $-\sqrt{2}$ であり、そのときの x の値は

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } \sqrt{2} \quad \left(x = \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{最小値: } -\sqrt{2} \quad \left(x = \frac{5}{4}\pi\right)$$

問題 2

(1)

与えられた等差数列の初項を a 、公差を d とすれば

$$a_n = a + (n-1)d$$

と表される。仮定より

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_{15} + a_{16} + a_{17} = -2622 \\ a_{99} + a_{103} = -1238 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a + 14d + a + 15d + a + 16d = -2622 \\ a + 98d + a + 102d = -1238 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a + 15d = -874 \\ a + 100d = -619 \end{cases} \\ & \therefore (a, d) = (-919, 3) \end{aligned}$$

となる。よって初項は -919 、公差は 3 である。

(答) 初項: -919

公差: 3

(2)

$$a_n = -919 + (n-1) \cdot 3 = -922 + 3n$$

より

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (-922 + 3k) \\ &= -922n + \frac{3}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{2}(3n^2 - 1841n) \\ &= \frac{3}{2}\left(n - \frac{1841}{6}\right)^2 - \frac{1841^2}{24} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\frac{1841}{6} = 306.8\cdots$$

であるから、 S_n が最小となる n は $n=307$ である。

(答) $n=307$

問題 3

(1)

$$\begin{aligned}x^4 - x^2 - 20 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 + 4)(x^2 - 5) &< 0 \\ \Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) &< 0 \quad (\because x^2 + 4 > 0) \\ \Leftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

(2)

m が奇数のとき、整数 n を用いて $m = 2n + 1$ と表すことができる。このとき

$$\begin{aligned}m^4 - m^2 - 20 &= (m^2 + 4)(m^2 - 5) \\ &= (m^2 + 4)\{(2n + 1)^2 - 5\} \\ &= (m^2 + 4)(4n^2 + 4n - 4) \\ &= 4(m^2 + 4)(n^2 + n - 1)\end{aligned}$$

となる。 $(m^2 + 4)(n^2 + n - 1)$ は整数であるから、 $m^4 - m^2 - 20$ は 4 の倍数である。よって命題は真である。

(答) 真

(3)

偽である。 $m = 2n$ のとき

$$\begin{aligned}m^4 - m^2 - 20 &= (m^2 + 4)(m^2 - 5) \\ &= (4n^2 + 4)(m^2 - 5) \\ &= 4(n^2 + 1)(m^2 - 5)\end{aligned}$$

となるから、任意の整数 m について $m^4 - m^2 - 20$ は 4 の倍数となる。命題の反例としてはすべての偶数が挙げられ、例えば $m = 0$ などである。

(答) 偽, 反例: $m = 0$

問題 4

(1)

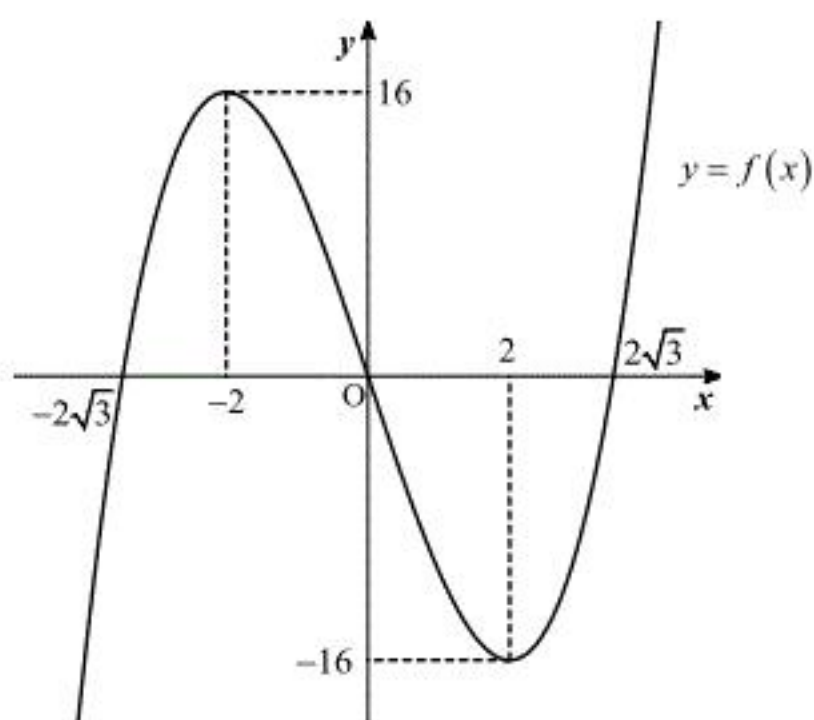
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 12x \\ &= x(x^2 - 12) \\ &= x(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$$

となるから、増減は下のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$

よって $y = f(x)$ のグラフは下のようになる。



(答) 前図

(2)

$2\sqrt{3} < 5$ であるから、(1)より $f(x)$ は $x = 2$ のとき最小値 -16 をとり、 $x = 5$ のとき最大値

$$f(5) = 5^3 - 12 \cdot 5 = 65$$

をとる。

(答) 最大値：65 ($x = 5$)

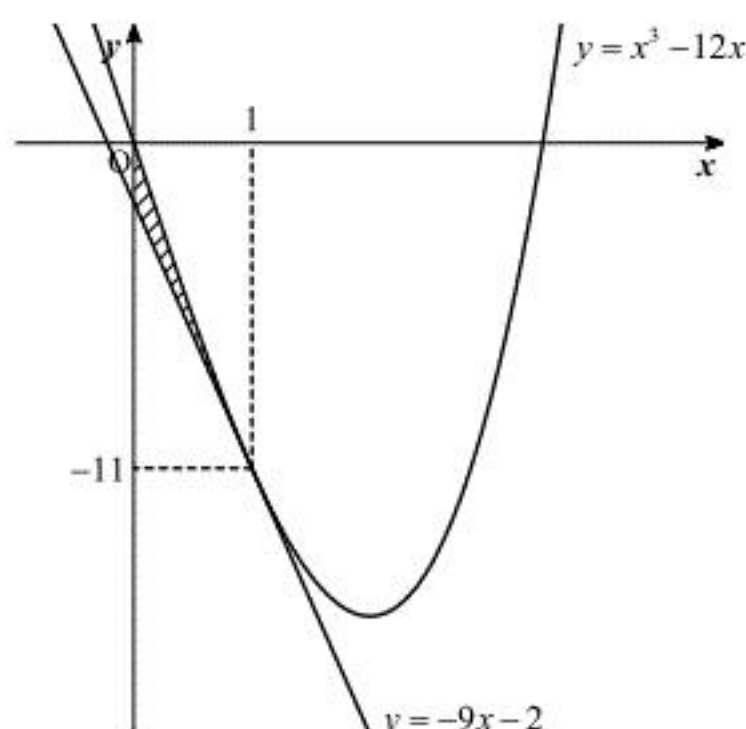
(3)

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= -9(x - 1) - 11 \\ &= -9x - 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = -9x - 2$

(4)



求める面積は、上図の斜線部の面積である。したがって、

$$\int_0^1 \{x^3 - 12x - (-9x - 2)\} dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

となる。

(答) $\frac{3}{4}$

問題 5

(1)

製造できるだるまの個数を x とすると、材料の制約条件から

$$x \leq \frac{84000}{100} = 840$$

であり、職人の作業時間の制約条件から

$$x \leq \frac{960}{2} = 480$$

となる。よって製造できるだるまの最大数は 480 個であり、得られる利益は

$$480 \times 300 = 144000 \text{ (円)}$$

となる。

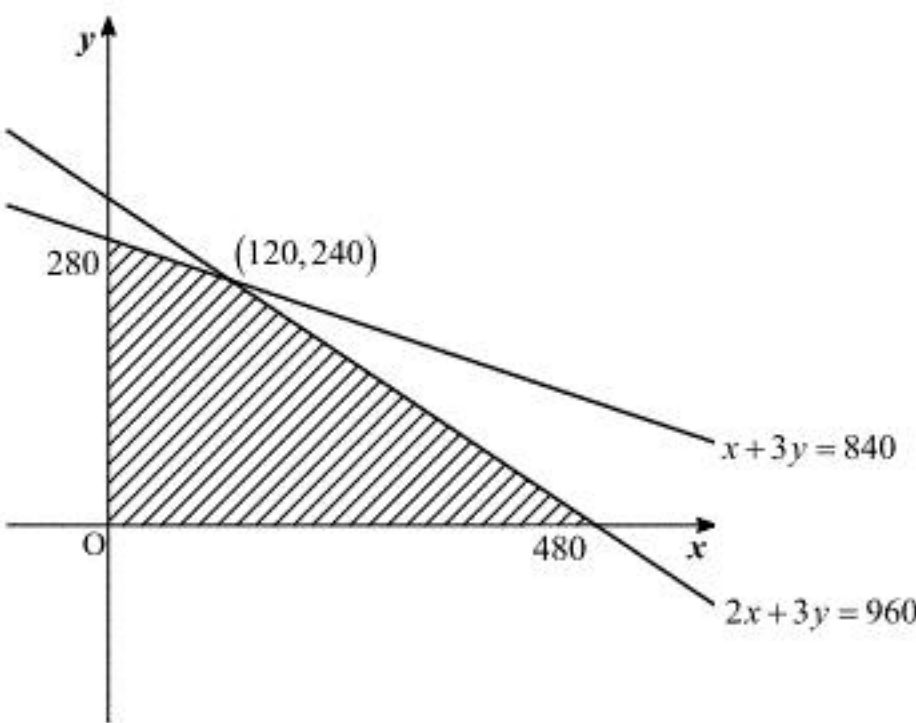
(答) 144000 円

(2)

だるま（小）の製造個数を x 、だるま（大）の製造個数を y とすると、条件より、

$$\begin{cases} 100x + 300y \leq 84000 \\ 2x + 3y \leq 960 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y \leq 840 \\ 2x + 3y \leq 960 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。①が表す領域は下図のようになる。

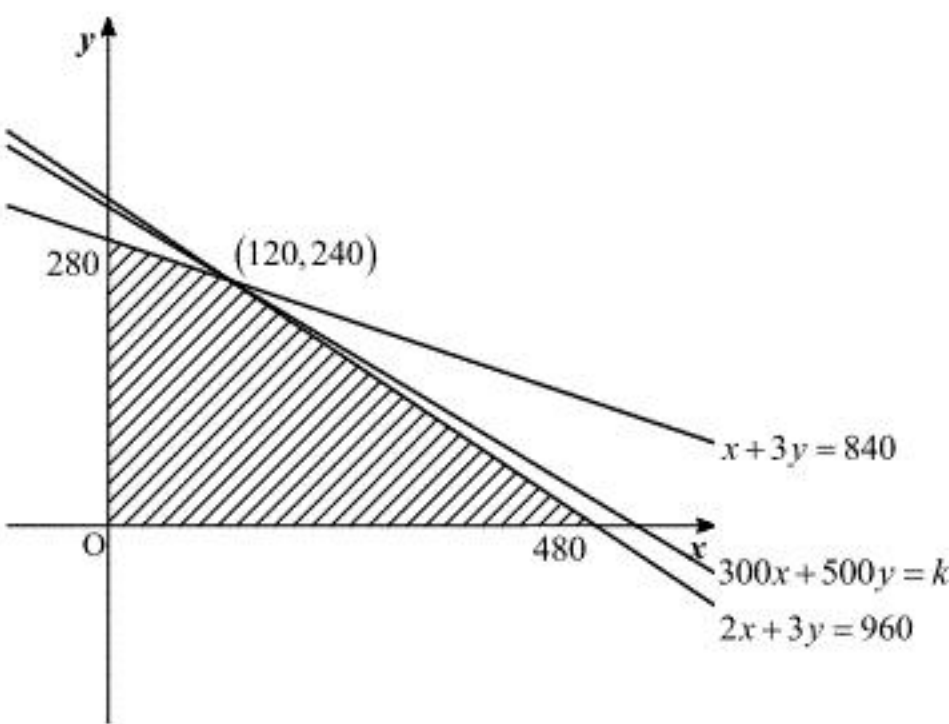


直線 $k = 300x + 500y$ がこの領域に含まれる格子点を通るとき、 k の最大値を考えればよい。

ここで、直線 $k = 300x + 500y$ の y 切片は $\frac{k}{500}$ であるから、 y 切片が最大となるときを考えればよい。各直線の傾きについて、

$$-\frac{2}{3} < -\frac{300}{500} < -\frac{1}{3}$$

が成り立つため、直線 $k = 300x + 500y$ は、点 $(120, 240)$ を通るときに y 切片が最大となる。



よってだるま（小）を 120 個、だるま（大）を 240 個製造・販売すれば利益総額は最大となる。

(答) だるま（小）：120 個
だるま（大）：240 個

(3)

低下後の利益を l とすると、

$$100x + 350y = l$$

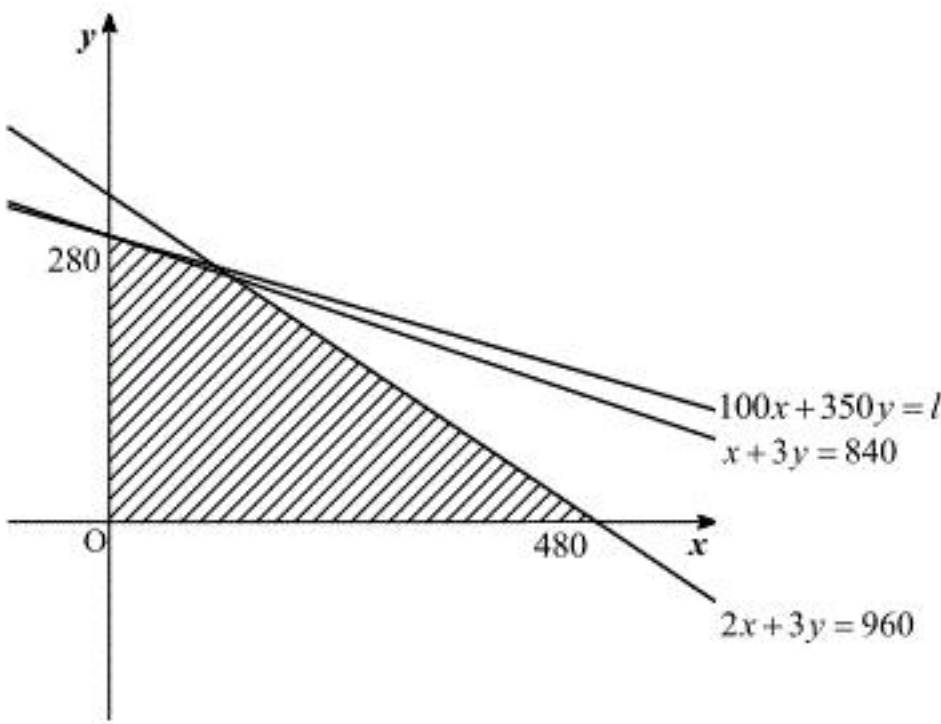
となる。この方程式が表す直線の傾きは

$$-\frac{100}{350} = -\frac{2}{7}$$

であり、各直線の傾きについて、

$$-\frac{2}{3} < -\frac{1}{3} < -\frac{2}{7}$$

が成り立つ。したがって、直線 $100x + 350y = l$ は、 $(0, 280)$ を通るときに y 切片が最大となる。



よって利益総額が最大となるのは、だるま（小）を 0 個、だるま（大）を 280 個製造・販売するときである。

(答) だるま（小）：0 個
だるま（大）：280 個