

# 問題 1

〔解答〕

- (1) P の座標を  $(p, 0)$  とおく。  $AP^2 = AB^2$  が成り立つから、

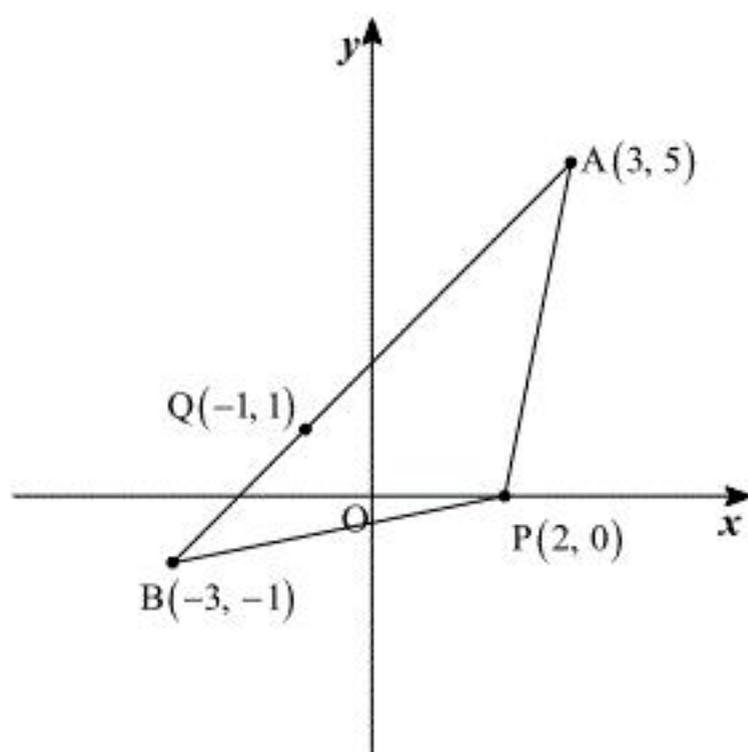
$$(p-3)^2 + (0-5)^2 = (p+3)^2 + 1^2 \Leftrightarrow p=2$$

となる。よって、P の座標は  $(2, 0)$  である。

(答)  $(2, 0)$

(2)	$(-1, 1)$
-----	-----------

- (3) 図は以下のようになる。



AQ > QB より、直線  $l$  は辺 AP と交点をもつ。この交点を R とおく。条件より、

$$\frac{AQ \cdot AR}{AB \cdot AP} = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow AR = \frac{3}{4}AP$$

となる。これより R は辺 AP を 3:1 に内分する点である。

$$\frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{4} = \frac{9}{4}, \quad \frac{3 \cdot 0 + 1 \cdot 5}{4} = \frac{5}{4}$$

であるから、R の座標は、

$$\left( \frac{9}{4}, \frac{5}{4} \right)$$

となる。よって、直線  $l$  の式は、

$$y = \frac{1 - \frac{5}{4}}{-1 - \frac{9}{4}}(x+1) + 1$$
$$= \frac{1}{13}x + \frac{14}{13}$$

となる。

(答)  $y = \frac{1}{13}x + \frac{14}{13}$

〔解説〕

- (2) Q の座標は、

$$\left( \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)}{3}, \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1)}{3} \right) = (-1, 1)$$

となる。

## 問題 2

〔解答〕

	(ア)	(イ)
(1)	$\frac{4}{15}\pi$	$\frac{8}{3}\pi$

(2)

$0 \leq x \leq 2\pi$  のとき  $-\frac{1}{5}\pi \leq \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}\pi \leq \frac{13}{10}\pi$  である。よって、

$$\cos\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{5}\pi\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}\pi \leq \frac{13}{10}\pi \Leftrightarrow \frac{14}{15}\pi < x \leq 2\pi$$

となる。

$$(答) \frac{14}{15}\pi < x \leq 2\pi$$

(3)

条件をみたすのは以下の2つの場合がある。

[1]  $\cos\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{5}\pi\right) < 0$  かつ  $\sin 2x > 0$  のとき

(2)の結果より、 $\cos\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{5}\pi\right) < 0$  となるのは、

$$\frac{14}{15}\pi < x \leq 2\pi$$

のときである。 $\sin 2x > 0$  となるのは、

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

のときである。以上より、この場合に条件を満たす  $x$  の範囲は、

$$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

である。

[2]  $\cos\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{5}\pi\right) > 0$  かつ  $\sin 2x < 0$  のとき

$\cos\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{5}\pi\right) > 0$  となるのは、

$$\cos\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{5}\pi\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{5} \leq \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{14}{15}\pi$$

のときである。 $\sin 2x < 0$  となるのは

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi, \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$$

のときである。以上より、この場合に条件を満たす  $x$  の範囲は、

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{14}{15}\pi$$

である。

以上[1][2]より、求める範囲は、

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{14}{15}\pi, \pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

である。

$$(答) \frac{\pi}{2} < x < \frac{14}{15}\pi, \pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

〔解説〕

(1)

$y = \cos\left\{\frac{3}{4}\left(x - \frac{4}{15}\pi\right)\right\}$  となるから、このグラフは  $y = \cos\frac{3}{4}x$  のグラフを  $x$  軸方向に  $\frac{4}{15}\pi$  だけ

平行移動したものである。また、この関数の周期は  $\frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}\pi$  である。

### 問題 3

〔解答〕

(1)	$a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$
-----	---

(2)

(1)の結果より,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+2} - a_{n+1} \\ &= \left( \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \right) - a_{n+1} \\ &= -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \\ &= -\frac{1}{2}b_n \end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $b_1 = a_2 - a_1 = 1$ である。よって,

$$\begin{aligned} b_n &= \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} b_1 \\ &= \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad b_n = \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

(3)

$n \geq 2$  のとき、階差数列の公式より,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left( -\frac{1}{2} \right)^{k-1} = \frac{1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1}}{1 - \left( -\frac{1}{2} \right)} = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\}$$

となる。これは  $n=1$  のときも成り立つ。

$$\text{(答)} \quad a_n = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\}$$

(4)

(3)の結果より,

$$a_n = \frac{171}{256} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} = \frac{171}{256} \Leftrightarrow \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} = -\frac{1}{512} \Leftrightarrow n = 10$$

である。

(答)  $n=10$

〔解説〕

(1)

条件より,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{a_{n+1} + a_n}{2} \\ &= \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \end{aligned}$$

となる。

## 問題 4

(1)

まず、対数の底の条件より  $0 < x < 1, 1 < x$  であり、真数条件より  $20 - y > 0$  である。また、左辺を変形すると、

$$\log_{\sqrt{x}} 2 + 1 = \frac{\log_x 2}{\log_x \sqrt{x}} + 1 = 2 \log_x 2 + 1 = \log_x 4x$$

となる。よって与式は、

$$\log_x 4x < \log_x (20 - y)$$

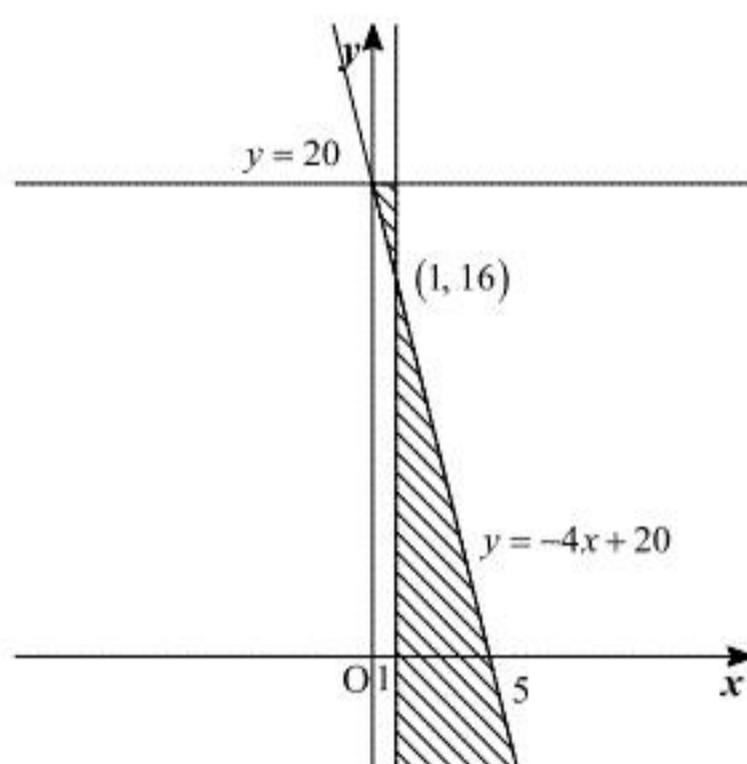
であるので、 $0 < x < 1$  のとき、

$$4x > 20 - y \Leftrightarrow y > -4x + 20$$

となり、 $1 < x$  のとき

$$4x < 20 - y \Leftrightarrow y < -4x + 20$$

となる。また、 $20 - y > 0 \Leftrightarrow y < 20$  である。以上より、下の図の斜線部分が  $D$  である。ただし、境界線は含まない。



(答) 前図(境界を除く)

(2)

直線  $x = k$  ( $k$  は自然数) 上において、 $(k, y)$  が  $D$  に含まれ、さらに  $y$  が自然数となるような点の個数を数える。(1)のグラフより  $k = 1$  または  $5 \leq k$  のときはそのような点は存在しない。よって  $k = 2, 3, 4$  の場合を考えればよい。

[1]  $k = 2$  のとき

条件を満たす点は、 $(2, i)$  (ただし  $i = 1, 2, \dots, 11$ ) であり、11個存在する。

[2]  $x = 3$  のとき

条件を満たす点は、 $(3, i)$  (ただし  $i = 1, 2, \dots, 7$ ) であり、7個存在する。

[3]  $x = 4$  のとき

条件を満たす点は、 $(4, i)$  (ただし  $i = 1, 2, 3$ ) であり、3個存在する。

以上[1][2][3]より、条件を満たす点の個数は、

$$11 + 7 + 3 = 21 \text{ 個}$$

である。

(答) 21個

## 問題 5

(1)

$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\vec{c}$  であるから

$$\overrightarrow{OG} = (1-s)\overrightarrow{OE} + s\overrightarrow{OF} = \frac{1-s}{2}\vec{a} + \frac{1-s}{2}\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c}$$

となる。

$$(答) \overrightarrow{OG} = \frac{1-s}{2}\vec{a} + \frac{1-s}{2}\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c}$$

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OD} + r\overrightarrow{DG} \\ &= (1-r)\overrightarrow{OD} + r\overrightarrow{OG} \\ &= \frac{1-r}{2}\vec{a} + r\left(\frac{1-s}{2}\vec{a} + \frac{1-s}{2}\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c}\right) \\ &= \frac{1-rs}{2}\vec{a} + \frac{r(1-s)}{2}\vec{b} + \frac{rs}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \overrightarrow{OP} = \frac{1-rs}{2}\vec{a} + \frac{r(1-s)}{2}\vec{b} + \frac{rs}{3}\vec{c}$$

(3)

P を直線 DG と平面 OBC の交点とすると、(2)の結果より、

$$\frac{1-rs}{2} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。この P が直線 BC 上にあるとき、

$$\frac{r(1-s)}{2} + \frac{rs}{3} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①より、

$$rs = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

であるから、②を整理すると、

$$\frac{r(1-s)}{2} + \frac{rs}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{r-1}{2} + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow r = \frac{7}{3}$$

である。③に代入すると、

$$s = \frac{3}{7}$$

を得る。このとき、

$$\frac{r(1-s)}{2} = \frac{2}{3} > 0, \frac{rs}{3} = \frac{1}{3} > 0$$

であるから、確かに点 P は辺 BC 上の点である。

$$(答) s = \frac{3}{7}$$